



Competencia de las futuras personas docentes en resolución, creación y razonamiento algebraico de problemas sobre tablas estadísticas

Prospective teachers' competence in solving, posing, and algebraic reasoning of statistical table problems

Competência dos futuros professores na resolução, criação e raciocínio algébrico de problemas em tabelas estatísticas

Jocelyn D. Pallauta^{1*}, Carmen Batanero², Mauro Rivas², Osmar Vera³

Received: Aug/28/2024 • Accepted: Apr/8/2025 • Published: Jan/31/2026

Resumen

[Objetivo] La competencia para crear problemas promueve una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y desarrolla habilidades de resolución de problemas en el estudiantado. Por ello, es necesario que el profesorado cuente con la competencia de crear y modificar adecuadamente los problemas que utilizan en el proceso de instrucción para ofrecer mejores oportunidades de aprendizaje al estudiantado. El objetivo de este estudio es evaluar el desarrollo de competencias de resolución y creación de problemas sobre tablas estadísticas y de asignación de niveles de razonamiento algebraico. **[Metodología]** En el contexto de una acción formativa, a una muestra de 66 futuras personas docentes de matemáticas se les plantearon dos problemas sobre tablas estadísticas extraídos de libros de texto. Sus respuestas fueron evaluadas utilizando un análisis de contenido. **[Resultados]** Los resultados indican que el profesorado futuro crea y resuelve correctamente problemas sobre tablas estadísticas y usan niveles avanzados de razonamiento algebraico. Sin embargo, se observan limitaciones en la asignación de los niveles de razonamiento algebraico a los problemas modificados o creados, los cuales se centraron, principalmente, en la construcción de diferentes tipos de tablas estadísticas. **[Conclusiones]** Las personas participantes de la acción formativa resolvieron de manera adecuada los problemas, sin embargo, desarrollaron de forma parcial las competencias de creación de problemas y asignación de niveles de razonamiento algebraico basados en tablas estadísticas. Se concluye la necesidad de reforzar el desarrollo de estas competencias en la formación del profesorado, dada su relevancia en su desempeño profesional y el aprendizaje del estudiantado.

* Autor para correspondencia

Jocelyn D. Pallauta, ✉ jocelyn.diaz@ulagos.cl, Orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0001-5508-4924>

Carmen Batanero, ✉ batanero@ugr.es, Orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0002-4189-7139>

Mauro Rivas, ✉ maurorivas@ugr.es, Orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0002-7616-7929>

Osmar Vera, ✉ osmar.dario@uca.es, Orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0003-2163-8516>

1 Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile.

2 Grupo de investigación FQM-126, Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística, Universidad de Granada, Granada, España.

3 Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.



Palabras clave: creación de problemas; niveles de razonamiento algebraico; tablas estadísticas; formación de profesores; conocimiento didáctico-matemático.

Abstract

[Objective] The competence to pose problems promotes a deep understanding of mathematical concepts and develops problem-solving skills in students. Therefore, teachers must have the competence to effectively pose and modify the problems they use in the instructional process to offer students better learning opportunities. This study aims to evaluate the development of problem-solving and problem-posing skills on statistical tables and the assignment of algebraic reasoning levels. **[Methodology]** As part of a training exercise, two problems related to statistical tables taken from textbooks were given to a sample of 66 prospective mathematics teachers. Their answers were evaluated through content analysis. **[Results]** Results revealed that prospective teachers correctly posed and solved problems involving statistical tables and demonstrated the use of advanced algebraic reasoning levels. However, limitations were observed in assigning algebraic reasoning levels to modified or self-created problems, particularly those focused on constructing different types of statistical tables. **[Conclusions]** Trainees adequately solved problems; however, they partially developed the competencies of problem-posing and assigning algebraic reasoning levels based on statistical tables. In conclusion, the development of these competencies must be reinforced in teacher training, given the relevance to their professional performance and student learning.

Keywords: Problem posing; algebraic reasoning levels; statistical tables; teacher training; didactic-mathematical knowledge.

Resumo

[Objetivo] A competência na resolução de problemas promove uma compreensão profunda de conceitos matemáticos e desenvolve habilidades de resolução de problemas nos alunos. Portanto, é necessário que os professores tenham a competência para criar e modificar adequadamente os problemas que usam no processo de ensino para oferecer melhores oportunidades de aprendizagem aos alunos. O objetivo deste estudo é avaliar o desenvolvimento de competências na resolução e na criação de problemas com base em tabelas estatísticas e na atribuição de níveis de raciocínio algébrico. **[Metodologia]** No contexto de uma atividade formativa, uma amostra de 66 futuros professores de matemática foi confrontada com dois problemas baseados em tabelas estatísticas retiradas de livros didáticos. Suas respostas foram avaliadas por meio de análise de conteúdo. **[Resultados]** Os resultados indicam que os futuros professores criam e resolvem corretamente problemas usando tabelas estatísticas e usam níveis avançados de raciocínio algébrico. Entretanto, foram observadas limitações na atribuição de níveis de raciocínio algébrico aos problemas modificados ou criados, que se concentravam principalmente na construção de diferentes tipos de tabelas estatísticas. **[Conclusões]** Os participantes da atividade formativa resolveram os problemas adequadamente; no entanto, desenvolveram apenas parcialmente a competência na criação de problemas e na atribuição de níveis de raciocínio algébrico com base em tabelas estatísticas. Conclui-se que há necessidade de fortalecer o desenvolvimento dessas competências na formação de professores, dada sua relevância para o desempenho profissional e para a aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: criação de problemas; níveis de raciocínio algébrico; tabelas estatísticas; formação de professores; conhecimento didático-matemático.



Introducción

Actualmente existe un considerable interés por investigar sobre la formación del profesorado, dado que su competencia tiene una influencia directa en el desarrollo de los conocimientos matemáticos que adquiere el estudiantado (König *et al.*, 2021; Totto y Senk, 2011; Wasserman *et al.*, 2023). Como parte del dominio especializado de los contenidos a enseñar, dicha formación requiere promover la competencia de creación y análisis de problemas matemáticos (Pochulu *et al.*, 2016), debido a su importancia como recurso didáctico, esencial para docentes y estudiantes (Cai *et al.*, 2015; Cai y Hwang, 2020). Por ello, se espera que el profesorado cuente con los conocimientos y competencias suficientes para adaptar o crear problemas apropiados para los fines didácticos, y evaluar la actividad matemática del estudiantado (Mallart *et al.*, 2018). En este sentido, el profesorado futuro requiere familiarizarse con experiencias que promuevan la creación y análisis de problemas (Tizón-Escamilla y Burgos, 2023) para ayudarle al estudiantado en el aprendizaje de las matemáticas (Silber y Cai, 2021).

Este trabajo se centra en la creación, resolución, modificación y análisis de problemas que involucran el uso de las tablas estadísticas, uno de los tipos de representación más usados para visualizar datos (Shreiner, 2018), y cuya interpretación forma parte de las competencias básicas de alfabetización para desenvolverse con éxito en la sociedad actual (National Center for Education Statistics, 2017). A través de las tablas estadísticas es posible desarrollar un razonamiento algebraico progresivo, pues el trabajo con ellas requiere, además de conocimientos estadísticos y aritméticos, procesos de razonamiento algebraico como

generalización, representación, interpretación y simbolización (Pallauta *et al.*, 2023).

Concretamente, y de acuerdo con Lahanier-Reuter (2003), se diferencian los siguientes tipos de tablas estadísticas:

- *Tabla de datos*, utilizada para representar un listado de valores de una o varias variables.
- *Tabla de distribución de una variable*, representa las modalidades de la variable y sus correspondientes frecuencias (absolutas, relativas o porcentuales).
- *Tabla de doble entrada o contingencia*, representa la distribución conjunta, marginal y condicionada, junto con la asociación e independencia entre dos variables estadísticas.

En las directrices curriculares españolas (MEP, 2022), las tablas estadísticas se presentan como un medio para estudiar diferentes temas (como correlación, probabilidad, estadística descriptiva o ciencias sociales). Sin embargo, a pesar de su aparente sencillez, variadas investigaciones alertan que el profesorado en formación carece de conocimientos suficientes sobre este tema (Fernandes y Barros, 2022; Fernandes *et al.*, 2021; Gea *et al.*, 2020; Pallauta *et al.*, 2022; Watson y Callingham, 2014). Además, son escasos los estudios que analizan la implementación de acciones formativas del profesorado futuro de matemáticas para desarrollar competencias didáctico-matemáticas sobre las tablas estadísticas y el razonamiento algebraico involucrado en los problemas sobre ellas.

Con el fin de hacer una contribución en este tema, describimos los resultados de la puesta en marcha de una acción formativa, dirigida al desarrollo de competencias de resolución y creación de problemas,



sobre tablas estadísticas, y la asignación de niveles de razonamiento algebraico involucrados en su resolución. En concreto, sobre dicha acción formativa, se plantean las siguientes preguntas de investigación: (1) ¿cómo resuelven y qué nivel de razonamiento algebraico muestran los futuros profesores de matemáticas en problemas que involucran tablas estadísticas?, (2) ¿cómo modifican estos problemas los futuros profesores para crear otros nuevos? y (3) ¿cuál es el nivel de razonamiento algebraico implícito en las resoluciones de los problemas propuestos que es reconocido por los futuros profesores?

En las siguientes secciones se presentan los elementos teóricos que sustentan este trabajo junto al método empleado. Seguidamente, se exponen y discuten los resultados obtenidos para responder a las preguntas de investigación propuestas. Se finaliza con un resumen de las principales conclusiones y limitaciones del trabajo.

Antecedentes

La creación de problemas matemáticos se centra en la formulación de nuevas situaciones o la adaptación de los problemas existentes (Silver, 1994), con la finalidad de ofrecer oportunidades de aprendizaje matemático efectivo al estudiantado (Baumanns y Rott, 2022; Silber y Cai, 2021).

Esta actividad se fomenta en las directrices curriculares españolas (MEFP, 2022), pues en 4.º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), para las asignaturas matemáticas A y B, se plantea la competencia específica: “Reformular de forma verbal y gráfica problemas matemáticos, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas” (pp. 41735, 41740). Por tanto, es necesario incorporar

el desarrollo de esta competencia en la formación de docentes, dado que se relaciona directamente con su práctica, y además les permite evaluar la comprensión matemática que logran sus estudiantes (Cai y Hwang, 2020; Elgrably y Leikin, 2021).

De acuerdo con Malaspina *et al.* (2015), en la creación de un nuevo problema intervienen cuatro elementos fundamentales: los datos disponibles, el requerimiento o lo que se pide determinar, abarcando la construcción de representaciones o demostraciones; el contexto en que se sitúa el problema (intramatemático o extramatemático), y los objetos matemáticos y conceptos que participan de manera implícita o explícita en su resolución (entorno matemático). Según los autores, la creación de nuevos problemas puede llevarse a cabo de dos maneras: a) mediante la modificación de un problema, al variar alguno de los cuatro elementos mencionados anteriormente; b) a través de la creación de un problema completamente nuevo, que puede surgir de una situación existente o de un determinado requisito con un enfoque matemático o didáctico.

La investigación sobre creación de problemas por parte del profesorado es creciente, y ha evidenciado que dicha capacidad puede dificultarse por una limitada comprensión conceptual del tema matemático tratado (Burgos y Chaverri-Hernández, 2022; Leavy y Hourigan, 2020; Zhang y Cai, 2021). Sin embargo, aún son escasos los estudios relacionados con la estadística y la probabilidad.

En esta línea, Alonso-Castaño *et al.* (2021) analizaron los problemas de probabilidad que crearon 109 profesores de educación primaria en formación. A partir de un problema se les pidió a las personas participantes plantear y resolver un problema adaptado a 6.º del curso de educación



primaria (de 11 a 12 años). Aproximadamente la mitad fue capaz de proponer un problema adecuado, acorde con las instrucciones dadas y resolverlo correctamente. Otros participantes propusieron problemas inadecuados para el curso solicitado, o que no se ajustaron a las condiciones indicadas, lo cual sugirió un limitado conocimiento de la probabilidad y del currículo. No obstante, según los autores, la experiencia les facilitó a las futuras personas docente movilizar su conocimiento sobre el planteamiento y resolución de problemas, la comunicación y la argumentación.

En su estudio, [Tizón-Escamilla y Burgos \(2023\)](#) analizaron la creación de un problema de proporcionalidad en un contexto probabilístico, a cargo de 17 personas futuras docentes de educación primaria. Además, debían identificar los objetos matemáticos y el nivel de razonamiento algebraico implicado en su resolución y las posibles dificultades del estudiantado. Posteriormente, debían crear variantes del problema y promover una actividad algebraica de nivel superior. Los resultados sugieren dificultades en establecer problemas que impliquen razonamiento proporcional e identificar cuáles elementos de razonamiento proporcional y algebraico están presentes en la resolución que propone cada docente.

En un artículo previo ([Pallauta et al.](#)) se pide a una muestra de 139 futuras personas docentes de secundaria en el área de matemáticas, analizar los objetos matemáticos implícitos en la resolución de dos problemas basados en tablas estadísticas y asignar el nivel de razonamiento algebraico implícito en dichas resoluciones. Se observó que la identificación de objetos matemáticos y la asignación del nivel de razonamiento algebraico a la resolución de los problemas fue deficiente.

En este trabajo, se utilizan problemas extraídos de libros de texto, para pedir a una muestra de 66 futuras personas docentes que, una vez resueltos, los modifiquen para proponer nuevos problemas y analicen el nivel de razonamiento algebraico implicado en su resolución.

Marco teórico

Los fundamentos del trabajo son el modelo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor (CCDM) y los niveles de razonamiento algebraico (en adelante NRA) de la actividad matemática que propone el enfoque onto-semiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (EOS) ([Godino, 2024](#); [Godino et al., 2007](#); 2019). En dicho enfoque las situaciones-problema juegan un papel fundamental, pues el significado de un objeto matemático se asigna en función del conjunto de prácticas operativas y discursivas realizadas al resolver las situaciones-problema vinculada con ese objeto.

Modelo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas

El modelo de CCDM ([Godino, 2024](#); [Godino et al., 2017](#)) surge de la premisa de que la persona docente debe tener la capacidad de analizar la práctica matemática puesta en juego en la resolución de problemas, reconocer las prácticas, los objetos y los procesos matemáticos implicados.

En este modelo se asume que el conocimiento matemático docente consta del *conocimiento matemático común*, relativo para ese tema en el nivel educativo donde se imparte la docencia (es decir, el que debe enseñar al estudiantado; por tanto, es compartido) y del *conocimiento ampliado*, que



es más extenso que el anterior y permite articularlo con los niveles superiores o con otras materias (Godino *et al.*, 2017).

En relación con los *conocimientos didáctico-matemáticos*, este modelo considera las diferentes facetas de conocimientos que emergen de los procesos de instrucción: *epistémica* (conocimiento didáctico-matemático del propio contenido, el cual es específico del profesorado y le permite gestionar la enseñanza), *ecológica* (relación del contenido matemático con otras materias, con el currículo y factores que condicionan la enseñanza), *cognitiva* (conocimiento de las dificultades, estrategias y razonamientos de los estudiantes y la forma de tenerlos en cuenta en el aprendizaje), *afectiva* (conocimiento y manejo de actitudes, creencias y emociones), *mediacional* (conocimiento de recursos didácticos para el tema en cuestión) e *interaccional* (formas de organizar el discurso del aula).

Con respecto al desarrollo de competencias profesionales, el modelo CCDM propone que el profesorado debe ser competente para analizar la actividad matemática implicada en la resolución de problemas, con el propósito de crear, gestionar y evaluar los apropiados para el estudiantado (Godino *et al.*, 2015). En este sentido, el modelo CCDM define las siguientes competencias requeridas por el profesorado: a) competencia de análisis de los diferentes significados del objeto matemático estudiado y la forma de contemplar en el proceso de instrucción; b) competencia de análisis de las prácticas matemáticas; c) competencia de análisis y gestión de las configuraciones didácticas; es decir, del modo de organizar el proceso de instrucción; d) competencia de análisis de las normas que regulan dicho proceso; e) competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

En particular, las dos primeras competencias se vinculan con la resolución y creación de problemas de los que trata este trabajo:

- La competencia de análisis del significado de los objetos matemáticos abarca la capacidad de identificar y crear situaciones-problema asociadas al significado del objeto a promover en la enseñanza; en este caso, las tablas estadísticas.
- La competencia de análisis de las prácticas matemáticas implica la identificación de las prácticas operativas y discursivas involucradas en la resolución de problemas, y reconocer los objetos y procesos matemáticos surgidos de dichas prácticas (Font *et al.*, 2022; Godino *et al.*, 2017).

En resumen, para dar respuesta a las tres preguntas de investigación planteadas, el conocimiento matemático común y avanzado de las personas participantes se evalúa al resolver los problemas propuestos (pregunta 1). Seguidamente, se estudian las variantes de los problemas creados por ellos y ellas, los cuales muestran su competencia de análisis del significado de las tablas estadísticas (pregunta 2). Por último, se evalúa la competencia de análisis de las prácticas matemáticas al analizar las resoluciones de los problemas modificados para asignarles un nivel de razonamiento algebraico (pregunta 3).

Niveles de razonamiento algebraico en el trabajo con tablas estadísticas

Desde el EOS se proponen los niveles de razonamiento algebraico (NRA) (Godino *et al.*, 2014, 2015) para tener en cuenta la dificultad de las prácticas empleadas en la resolución de los problemas en los cuales intervienen objetos algebraicos (relaciones



binarias de equivalencia u orden, operaciones y sus propiedades, funciones, operaciones y estructuras algebraicas junto a sus tipos y propiedades) y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización y modelación).

Godino *et al.* (2014) proponen los siguientes NRA utilizados habitualmente en la educación primaria:

- *NRA 0.* Se basa en operaciones con objetos de primer grado de generalidad (números particulares), mediante un lenguaje natural, numérico o icónico, por tanto, el razonamiento es numérico
- *NRA 1.* Se utilizan objetos de segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números), se presentan propiedades de la estructura algebraica de los números naturales y la igualdad como equivalencia. Se pueden usar símbolos, pero no se opera con ellos.
- *NRA 2.* Se presentan objetos con segundo grado de generalidad y variables como incógnitas. Aparece el significado relacional de la igualdad. Se emplean representaciones simbólicas y se resuelven ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$ ($A, B, C \in \mathbb{R}$), pero no se opera con la incógnita.
- *NRA 3.* Se utilizan incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$ ($A, B, C, D \in \mathbb{R}$). Se usan los símbolos de forma analítica.

En Godino *et al.* (2015), se añaden tres niveles superiores de NRA, dirigidos a la educación secundaria, que abordan el

tratamiento de parámetros vinculados a familias de ecuaciones y funciones, y el análisis de estructuras algebraicas:

- *NRA 4.* Se utilizan parámetros junto a coeficientes variables para representar familias de ecuaciones y funciones, realizando operaciones con coeficientes variables, pero no con los parámetros.
- *NRA 5.* Se realizan cálculos analíticos (sintácticos) que involucran parámetros junto con otras variables.
- *NRA 6.* Se trabaja con estructuras algebraicas junto a operaciones y composición de funciones.

Aplicación al análisis de la actividad algebraica en las tablas estadísticas

Pallauta *et al.* (2023) analizan los NRA ligados a los diferentes tipos de tablas estadísticas que describe Lahanier-Reuter (2003), los cuales se detallan a continuación:

- *Tabla de datos.* Abarca los conceptos de variable y sus valores, generalmente numéricos particulares, su trabajo implica un NRA 0.
- *Tabla de distribución de una variable.* Se distinguen tres tipos con diferente NRA: a) *Tabla con frecuencias ordinarias*, involucra al menos un NRA 1, pues se considera el uso de objetos de segundo grado de generalidad (clases de equivalencia). b) *Tabla con frecuencias acumuladas*, involucra el concepto de desigualdad, pues implica un NRA 3. Se requiere operar con incógnitas para determinar, por ejemplo, el valor de los cuartiles; c) *Tabla con datos agrupados en intervalos*, además de las frecuencias anteriores



- incluye los conceptos de máximo y mínimo, marca de clase, extremo inferior y superior, es decir, un NRA 3.
- *Tabla de doble entrada o contingencia.* Las frecuencias de las celdas interiores pueden ser absolutas, relativas o porcentuales y se relacionan con dos variables (x e y) en el caso de las conjuntas, y con una sola variable (x o y) en las marginales. En las frecuencias condicionadas, una variable se convierte en parámetro, ya que al fijar una de ellas, se obtiene una distribución condicionada específica de la otra variable. De este modo, la resolución puede involucrar un NRA 4 (Godino *et al.*, 2015).

El modelo NRA descrito (Godino *et al.*, 2014; 2015) en un inicio se pretendía caracterizar el razonamiento algebraico empleado en la resolución de problemas matemáticos específicos. No obstante, como se afirma en los antecedentes, se han realizado investigaciones en las cuales se utiliza los NRA para caracterizar la actividad algebraica mostrada en la resolución de problemas de temas específicos; por ejemplo, la proporcionalidad y la probabilidad (Burgos *et al.*, 2018; Tizón-Escamilla y Burgos, 2023).

Método

Este trabajo se apoya en la implementación y evaluación de una acción formativa dirigida a desarrollar conocimiento y competencia didáctico-matemáticas del profesorado en formación. El método utilizado en este estudio es el de investigación basada en el diseño (Van den Akker *et al.*, 2006), el cual consta de cuatro etapas: estudio preliminar, diseño de la acción formativa, implementación y valoración de la misma. Para

valorar la acción formativa se observa su efecto en el desarrollo de las competencias objeto de este estudio.

Contexto y participantes

En la acción formativa participaron 66 docentes en formación del programa de Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (especialidad de Matemáticas), que es requisito en España para ejercer la docencia en la educación secundaria (de 12 a 15 años) y bachillerato (de 16 a 17 años). Los participantes contaban con un grado (4 años de universidad) en matemáticas, estadística, ciencias o ingeniería; además, durante su formación de grado, habían realizado uno o varios cursos de álgebra y estadística. Por tanto, contaban *a priori* con un buen conocimiento matemático sobre estos temas.

Implementación de la acción formativa

La acción formativa se desarrolló en tres sesiones (dos horas cada una), en las cuales se trabajaron la creación de problemas, las características del modelo NRA y la actividad algebraica requerida en el trabajo con los diferentes tipos de tablas estadísticas.

En la primera sesión, el formador de docentes introdujo las características del modelo NRA (Godino *et al.*, 2014; 2015), mediante un debate con las personas participantes sobre la utilidad del modelo para analizar y reflexionar sobre los objetos y procesos algebraicos presentes en los problemas matemáticos escolares. Además, se presentaron a las personas docentes en formación los diversos objetos y procesos algebraicos utilizados en la enseñanza primaria y secundaria: relaciones binarias,



operaciones y propiedades aplicadas a elementos de distintos conjuntos, funciones y procesos de generalización-particulación y su representación.

En la segunda sesión, se analizó la actividad algebraica implicada en el trabajo con diferentes tipos de tablas estadísticas junto a los objetos estadísticos que las caracterizan (Pallauta *et al.*, 2023): población, individuo, variable, valor, frecuencia y sus tipos, distribución (simple, conjunta, condicionada, marginal), resúmenes estadísticos. Se enfatizó en la importancia de contar con los conocimientos fundamentales respecto a los distintos tipos de tablas estadísticas y su uso en el estudio de varios temas (p. ej. resúmenes estadísticos, probabilidad y correlación). Se trabajaron ejemplos de asignación de NRA y también se ejercitó la creación de problemas, algunos de los estos involucraron tablas estadísticas para ejemplificar la creación y modificación de problemas.

En la tercera sesión, que se describe a continuación, se llevó a cabo la evaluación de los conocimientos y competencias adquiridos. Las respuestas escritas de las personas participantes de los problemas planteados se estudiaron mediante análisis de contenido (Schreier, 2014), con lo cual se aseguró la fiabilidad de la codificación, mediante sucesivas revisiones de las personas autoras, hasta llegar a un acuerdo.

Evaluación de los conocimientos y competencias adquiridos

Para llevar a cabo la evaluación, se propusieron dos problemas sobre tablas estadísticas, seleccionados de acuerdo con los siguientes criterios: a) debía ser problemas tomados de libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria (ESO); b) los problemas requerían involucrar diferentes tipos de tablas estadísticas y la posibilidad de trabajar

con distintos niveles de razonamiento algebraico. Para cada uno de ellos, las personas participantes debían, individualmente, completar las siguientes instrucciones:

1. Resolver cada problema de dos maneras diferentes.
2. Crear un nuevo problema variando el dado inicialmente.
3. Resolver los nuevos problemas creados e indicar el NRA involucrado.

A continuación, se analizan los problemas propuestos a las personas participantes y para cada uno de ellos sus posibles soluciones que implican diferentes niveles de razonamiento algebraico. Se muestran ejemplos de respuestas que se han codificado como Px, donde x indica el orden de la persona docente en formación que proporciona la respuesta en la lista de clase.

Análisis del Problema 1

En el Problema 1 (Figura 1) se pide completar la tabla de contingencia cuando se conocen algunas probabilidades condicionadas. La resolución implica el concepto de probabilidad condicionada y el uso de expresiones algebraicas con variables (A, B, C, D), para representar dichas probabilidades. El suceso que juega el papel de condición es un parámetro, pues, al cambiar su valor, se obtiene diferente probabilidad condicionada. Por lo tanto, se trabaja al menos con un NRA 4 (Pallauta *et al.*, 2023).

La resolución del problema puede implicar el uso de NRA 4 y NRA 5. En el NRA 4 (Figura 2), la expresión simbólica de las probabilidades condicionadas, conjuntas y simples involucran operaciones conjuntistas (intersección) y algebraicas (división). Los sucesos que aparecen como condición son parámetros, pues al cambiarlos varía la



Completa la tabla de contingencia a partir de los siguientes datos:

$$P(D|A) = \frac{8}{25}; P(B|C) = \frac{13}{30}; P(B|D) = \frac{7}{15}$$

Nota: las fracciones no están simplificadas.

	C	D	Total
A			
B			
Total			

Figura 1. *Problema 1.*

Fuente: extraído de Mejía *et al.* (2016, p. 318).

Se calculan los valores de las probabilidades totales de sucesos, y las probabilidades de intersección:

$$P(D|A) = \frac{8}{25} = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} \Rightarrow \begin{cases} \text{la frecuencia conjunta de D y A es 8} \\ \text{la frecuencia marginal de A es 25} \end{cases}$$

$$P(B|C) = \frac{13}{30} = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \Rightarrow \begin{cases} \text{la frecuencia de B y C es 13} \\ \text{la frecuencia marginal de C es 30} \end{cases}$$

$$P(B|D) = \frac{7}{15} = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} \Rightarrow \begin{cases} \text{la frecuencia conjunta de B y D es 7} \\ \text{la frecuencia marginal de D es 15} \end{cases}$$

Luego para determinar los valores faltantes se realizan los siguientes cálculos:

$$\#(C \cap A) + \#(D \cap A) = \#Casos Totales de A \Rightarrow x + 8 = 25 \Rightarrow x = 17$$

$$\#(B \cap C) + \#(B \cap D) = \#Casos Totales de B \Rightarrow 13 + 7 = y \Rightarrow y = 20$$

$$Total = \#Casos Totales de A + \#Casos Totales de B = 25 + 20 = 45$$

Figura 2. *Ejemplo de resolución del Problema 1 con NRA 4 por el participante P18*

Fuente: propia de la investigación.

distribución condicionada en la tabla de contingencia, pero no se opera con ellos. Asimismo, se utilizan y resuelven ecuaciones.

En la Figura 3 se presenta la respuesta de P31 que muestra un NRA 5, pues se utilizan ecuaciones y parámetros. Se aprecia el uso de una simbología algebraica, propiedades y

diferentes operaciones analíticas en la resolución de sistemas de ecuaciones.

Análisis del Problema 2

En el Problema 2 (Figura 4) los datos se exponen en una tabla de datos que incluye los conceptos de variable y sus valores (Pallauta *et al.*, 2023). Su resolución requiere



Por lo que se tiene que:

	C	D	Total
A	x_1	x_2	$x_1 + x_2$
B	x_3	x_4	$x_3 + x_4$
Total	$x_1 + x_3$	$x_2 + x_4$	$\sum_{i=1}^4 x_i$

$$P(D|A) = \frac{x_2}{x_1 + x_2} = \frac{8}{25} \quad (1)$$

$$P(B|C) = \frac{x_3}{x_1 + x_3} = \frac{13}{30} \quad (2)$$

$$P(B|D) = \frac{x_4}{x_2 + x_4} = \frac{7}{15} \quad (3)$$

También se obtiene que:

$$P(C|A) = \frac{x_1}{x_1 + x_2} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1}{x_2} \cdot P(D|A) = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{8}{25} \quad (1')$$

$$P(A|C) = \frac{x_1}{x_1 + x_3} = \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_1 + x_3} = \frac{x_1}{x_3} \cdot P(B|C) = \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{13}{30} \quad (2')$$

$$P(A|D) = \frac{x_2}{x_2 + x_4} = \frac{x_2}{x_4} \cdot \frac{x_4}{x_2 + x_4} = \frac{x_2}{x_4} \cdot P(B|D) = \frac{x_2}{x_4} \cdot \frac{7}{15} \quad (3')$$

Y dado que $P(X|Y) + P(\bar{X}|Y) = 1$ basta con sumar (n) con (n') para obtener:

$$x_1 = \frac{17}{8} x_2; \quad x_1 = \frac{17}{13} x_3; \quad x_2 = \frac{8}{7} x_4$$

Seguidamente se obtiene un sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas, por lo que se proceden a poner en función de una de ellas que actuará como parámetro:

$$x_2 = \frac{8}{17} x_1; \quad x_3 = \frac{13}{17} x_1; \quad x_4 = \frac{7}{17} x_1$$

Figura 3. Ejemplo de resolución del Problema 1 con NRA 5 por el participante P31
Fuente: propia de la investigación.

Las maratones se han hecho populares en los últimos años y Cristina se ha inscrito en una de 10 km. Para tener un buen desempeño, ha creado un plan de entrenamiento que consiste en apuntar las distancias de algunas calles, el tiempo que demora aproximadamente en recorrerlas y el número de veces que repite el trayecto. Si Cristina quiere recorrer en promedio 135 metros por cada minuto. ¿En cuántos minutos debe recorrer el trayecto por la avenida 3?

Trayecto	Distancia (metros)	Tiempo (min)	Repeticiones
Avenida 1	1100	7	2
Avenida 2	723	9	1
Avenida 3	2180	x	1

Figura 4. Problema 2
Fuente: extraído de Merino et al. (2016, p. 201).



despejar una incógnita que representa el valor desconocido de una de las variables, lo cual implica invertir el algoritmo de cálculo de la media ponderada.

La resolución del Problema 2 involucra diferentes NRA. Por ejemplo, la respuesta de P19 (Figura 5, izquierda) muestra un NRA 0, pues se opera con números particulares, en un lenguaje natural y numérico, en el cual no intervienen objetos ni procesos algebraicos. Otros participantes también en este nivel, como P13

(Figura 5, derecha), utilizan el ensayo y error, entregando un valor aproximado, pues esta estrategia no permite determinar el valor exacto.

La estrategia de reducción a la unidad indica el uso del NRA 1 (Burgos y Godino, 2020), como es el caso de P45 (Figura 6), quien reconoce la razón unitaria 135m/1min y aplica adecuadamente a propiedades de la relación de proporcionalidad directa, y aunque utiliza una incógnita, solo representa el resultado de una operación y no opera con ella.

La distancia total recorrida: $1100 + 1100 + 723 + 2180 = 5103$ Luego se determina el tiempo requerido para recorrer esta distancia en 135 metros por minuto: 5103: 135 = 37,8, como se conoce el tiempo empleado en recorrer la avenida 1 y 2 (23 minutos). El tiempo requerido para recorrer la avenida 3 se obtiene: 37,8 - 23 = 14,8; por lo tanto, se requieren 14,8 minutos.	Si 1100 metros lo recorre en 7 min, 2180 metros (casi el doble) lo recorre en 14 min. aprox. $2200 + 723 + 2180 = 5103 \text{ m}$ $14 + 9 + 14 = 37 \text{ min}$ $5103/37 = 137,91 \text{ m/min}$ Como me paso un poco, entonces llego a la conclusión de que sería algo más de 14 min. Al hacerlo con 15 min sale 134,28, es decir, no llego a los 135 m/min. Por lo tanto, el tiempo que se tarda en recorrer la Avenida 3 está entre 14 y 15 min, más cerca de 15 min.
Respuesta P19	Respuesta P13

Figura 5. Ejemplos de resolución del Problema 2 con NRA 0

Fuente: propia de la investigación.

La razón de cantidades se que corresponden son constantes: $\frac{135}{1} = \frac{5103}{x}$ Considerando la igualdad del producto cruz de los términos en una proporción, $x = \frac{5103}{135} = 37,8$ Sin embargo, como tardaba 23 minutos en recorrer las avenidas 1 y 2, se tiene que 37,8-23=14,8, por tanto, el tiempo requerido para recorrer la avenida 3 es de 14,8 minutos.
--

Figura 6. Ejemplo de resolución del Problema 2 con NRA 1 por el participante P45

Fuente: propia de la investigación.



En el NRA 2, mostrado por P21 (Figura 7), se utiliza la fórmula de la velocidad media, al plantear una ecuación en que se opera con la incógnita.

$$\text{Distancia recorrida total: } 2 \cdot 1100 + 723 + 2180 = 5103 \text{ metros}$$

$$\text{Tiempo empleado: } 7 \cdot 2 + 9 + x = 23 + x \text{ minutos}$$

$$\frac{5103}{23+x} = 135 \rightarrow 3105 + 135x = 5103 \rightarrow x = 14'8 \text{ minutos}$$

Figura 7. Ejemplo de resolución del Problema 2 con NRA 2 por el participante P21

Fuente: propia de la investigación.

Resultados y discusión

Para dar respuesta a las preguntas de investigación, los resultados de la evaluación se organizan en tres apartados: (1) corrección de la resolución de los problemas y NRA mostrado, (2) creación de nuevos problemas modificando los iniciales y (3) asignación del NRA en los problemas creados.

Corrección de la resolución de los problemas

Para responder a la primera pregunta de investigación (¿cómo resuelven y qué

nivel de razonamiento algebraico muestran las personas docentes de matemáticas en formación en problemas que involucran tablas estadísticas?), se analizan las soluciones proporcionadas a los dos problemas iniciales.

La Tabla 1 resume las soluciones de las personas participantes según su corrección y nivel NRA de dicha respuesta. Recordamos que se pidieron dos soluciones diferentes de cada problema (aunque algunas personas solo proporcionan una), por lo que el número total de soluciones analizadas es mayor al tamaño

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje¹ de soluciones de los problemas iniciales según su corrección y nivel NRA

Solución proporcionada	Problema 1 N=132		Problema 2 N=116	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
<i>Correcta</i>				
C.1. NRA 0			8	6,9
C.2. NRA 1			7	6,0
C.3. NRA 2			61	52,3
C.4. NRA 4	109	82,6		
C.5. NRA 5	3	2,3		
<i>Incorrecta</i>				
I.1. Registra probabilidades en lugar de frecuencias absolutas	18	13,6		
I.2. Utiliza la media simple en lugar de la ponderada			7	6,0
I.3. Pondera las medias			28	24,1
I.4. Otros	2	1,5	5	4,3

Nota: fuente propia de la investigación.

¹ El porcentaje se calcula con respecto al total de soluciones aportadas en cada problema.



de la muestra de docentes. La mayoría de las personas participantes responde correctamente al Problema 1, mediante una resolución de nivel NRA 4 (82,6 %), mientras que, aunque en el Problema 2 la mayoría responde de manera correcta utilizando un NRA 2 o inferior (65,2 %), un porcentaje importante lo responde incorrectamente (34,4 %).

Las respuestas incorrectas en el Problema 1 se deben, principalmente, a la confusión de probabilidades con frecuencias absolutas. Por ejemplo, P15 (Figura 8), aunque

utiliza un lenguaje simbólico correcto, asigna valores a probabilidades simples y conjuntas que no son coherentes con la definición de probabilidad (valores entre 0 y 1).

En el Problema 2 se encontraron dos tipos de errores:

1. *Emplea la media simple.* Solo considera la distancia del recorrido que se pide determinar, ignorando el tiempo en que se recorren los tres trayectos, como P2 (Figura 9, izquierda).

Aplicar la definición de probabilidad condicionada

$$P(D|A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{8}{25} \Rightarrow \begin{cases} P(D \cap A) = 8 \\ P(A) = 25 \end{cases}$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{13}{30} \Rightarrow \begin{cases} P(B \cap C) = 13 \\ P(C) = 30 \end{cases}$$

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{7}{15} \Rightarrow \begin{cases} P(B \cap D) = 7 \\ P(D) = 15 \end{cases}$$

Entonces: $P(C \cap A) = 25 - 8 = 17$; $P(B) = 13 + 7 = 20$; $P(\text{total}) = 25 + 20 = 45$

Figura 8. *Ejemplo de resolución incorrecta Problema 1 del participante P15*

Fuente: propia de la investigación.

Se realizan operaciones aritméticas con números particulares, usando factores de conversión

$$\frac{1 \text{ min}}{135 \text{ m}} \cdot 2180 \text{ m} = 16,5 \text{ min}$$

Respuesta incorrecta P2

Se calcula directamente la velocidad media total del trayecto a través de una media ponderada

$$(1100 \times 2 \div 7 + 723 \div 9 + 2180 \div x) / 4 = 135$$

De donde obtenemos que x son los minutos que debe demorarse en realizar el trayecto por la avenida 3 y el resultado sería $x = 14,99$

Respuesta incorrecta P5

Figura 9. *Ejemplo de resoluciones incorrectas Problema 2*

Fuente: propia de la investigación.



De manera similar ocurre con los problemas creados a partir del Problema 2. Por ejemplo, P59 (Figura 11, izquierda) presenta los datos en la tabla y solicita el cálculo de la velocidad media, al suprimir la dificultad de invertir el cálculo de la media ponderada. Otros, como P56 (Figura 11, derecha), proponen un problema diferente al

que se planea en un inicio, considerando la elaboración e interpretación de una tabla de distribución de una variable con frecuencias ordinarias, incorporando también el cálculo de la media ponderada.

En la Tabla 2 se presentan el tipo de modificaciones y elementos considerados para la creación de nuevos problemas,

Cristina se ha inscrito en una carrera de 10 km. Para tener un buen rendimiento, ha creado un plan de entrenamiento que consiste en anotar las distancias de algunas calles, el tiempo que demora aproximadamente en recorrerlas y el número de veces que repite el trayecto. ¿Cuál es la velocidad media en metros por minuto que recorre Cristina en su entrenamiento?				En la siguiente lista, se muestran las diferentes notas que han obtenido un grupo de 20 alumnos de una clase de segundo de la ESO:			
Trayecto	Distancia (metros)	Tiempo (min)	Repeticiones	1 3 5 4 6 7 8 2 10 8 9 4 6 1 7 0 1 4 2 7			
Avenida 1	1100	7	2	i. Elabora la tabla de frecuencias absolutas y relativas.			
Avenida 2	723	9	1	ii. Calcula la media, la mediana y la moda.			
Avenida 3	2180	16	1	iii. ¿Qué nota debería sacar un nuevo alumno para que la media de la clase sea de 5?			
Ejemplo de problema modifica datos P59				Ejemplo de cambio de problema P56			

Figura 11. *Ejemplo de creación de problemas a partir del Problema 2*

Fuente: propia de la investigación.

Tabla 2. *Frecuencia y de cambios en la creación de nuevos problemas y porcentaje respecto al total de problemas creados*

Nuevo problema	Problema 1		Problema 2	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
<i>Realiza modificaciones</i>				
Datos o preguntas planteadas	16	24,2	13	19,7
Reemplaza dato por incógnita	11	16,5	12	18,2
Cambio de contexto			3	4,5
<i>Crea nuevo problema</i>				
Completar tabla	3	4,5		
Construir tabla	17	25,8	15	21,4
Lectura de frecuencias	1	1,5	3	4,3
Determinar probabilidad compuesta o condicionada	5	7,6		
Calcular estadístico (media, media ponderada, varianza)			10	14,3
<i>No aporta enunciado</i>	13	19,7	14	20,0
Total	66	100,0	70	100,0

Nota: fuente propia de la investigación.



respecto al problema planteado en un inicio. En relación con el Problema 1, la creación de los nuevos problemas se centran en construir tablas de doble entrada (25,8%); especialmente, a partir de información ofrecida de manera verbal (Figura 10, derecha). Otros enunciados mantienen el problema planteado, pero modifican los datos (Figura 10, izquierda) o la pregunta (24,2%). También se presentan modificaciones caracterizadas por el reemplazo de un dato numérico por una incógnita (16,5%) con el propósito de incrementar la dificultad del problema.

Con respecto al Problema 2, la mayoría de las personas participantes cambia por completo el enunciado del problema inicial (40,9%), considerando variados procedimientos como: la construcción de tablas, el cálculo de diferentes estadísticos, determinar probabilidades o la lectura de frecuencias asociadas a determinados valores de la variable. Asimismo, tanto en las modificaciones, como las creaciones de nuevos problemas, se incluyen varios tipos de cambios o consignas en un mismo problema (Figura 11, derecha). Por esta razón, la suma total es mayor que el número de participantes y los porcentajes de esta tabla se calculan con respecto al número de problemas creados.

Finalmente, un porcentaje importante de docentes en formación no aporta el enunciado de un nuevo problema, tanto en el Problema 1 (19,7%) como en el Problema 2 (21,2%). Estos resultados fueron mejores que los obtenidos por [Alonso-Castaño et al. \(2021\)](#) sobre creación de problemas de probabilidad, donde solo la mitad de la muestra fue capaz de proponer un problema adecuado, aunque en su caso se trataba de creación completa y no de modificación o creación a partir de la resolución de un problema dado.

Respecto al tipo de tabla que utilizan las personas participantes en el enunciado de los nuevos problemas, en la Tabla 3 se observa que en el Problema 1, la mayoría mantiene la tabla de doble entrada (72,7%). En el Problema 2 la mayoría de las futuras personas docentes conserva el uso de tablas de datos (48,5%), seguida por las tablas de distribución de una variable con frecuencias ordinarias (21,2%). Un porcentaje muy bajo no contempla el uso de tablas en la creación de nuevos problemas, tanto en el Problema 1 (7,6%) como en el Problema 2 (4,5%). Estos resultados indican que la modificación o creación de nuevos problemas, a partir de uno resuelto, que involucra el uso de tablas estadísticas, no ha sido una actividad compleja para las futuras personas profesionales en el área.

Tabla 3. *Frecuencia y porcentaje del tipo de tabla utilizado en el enunciado del nuevo problema*

Tipo de tabla utilizado en el nuevo Problema	Problema 1		Problema 2	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Datos			32	48,5
Distribución de una variable con frecuencias ordinarias			14	21,2
Distribución de una variable con frecuencias acumuladas			1	1,5
Doble entrada o contingencia	48	72,7	2	3,0
No utiliza tabla	5	7,6	3	4,5
No aporta enunciado	13	19,7	14	21,2
Total	66	100,0	66	100,0

Nota: fuente propia de la investigación.



Asignación de NRA a los problemas que construyen las personas participantes

Para responder a la tercera pregunta de investigación (¿cuál es el nivel de razonamiento algebraico implícito en las resoluciones de los problemas propuestos que es reconocido por los futuros profesores?), se observó el grado de corrección (correcto/incorrecto) de los NRA reconocidos por los futuros profesores, en función de los objetos/procesos algebraicos identificados. Por ejemplo, P69, en la Figura 12 se presenta un problema creado a partir del Problema 2, cuya resolución involucra objetos intensivos con segundo grado de generalidad y operar con la incógnita implicando un NRA 3, correctamente reconocido y justificado.

En la Tabla 4 se resume el NRA identificado y correctamente asignado por las personas participantes en cada problema. Se aprecia que menos del 50 % de las personas participantes asigna un NRA a los problemas creados. Además, la mayoría de quienes lo hacen lo asignan de manera incorrecta. En el Problema 1 solo un pequeño porcentaje (3,0 %) asigna de forma correcta NRA 4 y NRA 5 a los problemas creados. El NRA mayoritariamente reconocido, en este problema, es el NRA 3 (24,2 %), pero de manera incorrecta, al no identificar de manera adecuada los objetos algebraicos implicados, en particular el trabajo con parámetros involucrados en el uso de la tabla de doble entrada, así como el uso de la definición y los procesos algebraicos de unitarización y

Si Cristina quiere recorrer todo el trayecto con una velocidad promedio igual a la mitad de la que emplea para recorrer el trayecto de la avenida 3, ¿cuántos minutos debe demorarse en realizar el trayecto por la avenida 3?

Al tratarse de un enunciado similar que el problema original, para resolverlo, establecemos que la velocidad promedio de todo el trayecto es igual a la mitad de la velocidad que emplea en recorrer el trayecto de la avenida 3:

$$\frac{1100 \cdot 2 + 723 + 2180}{7 \cdot 2 + 9 + x} = \frac{5103}{23 + x} = \frac{1}{2} \left(\frac{2180}{x} \right) \quad (1)$$

De esta forma, tenemos una ecuación que podemos resolver:

$$2180(23 + x) = 5103 \cdot 2x \quad (2)$$

Finalmente, obtenemos:

$$x = \frac{23 \cdot 2180}{2 \cdot 5103 - 2180} \approx 6,25 \quad (3)$$

El tiempo que necesita para recorrer la avenida 3 es 6,25 minutos. Para resolver este problema será necesario utilizar variables como incógnitas y realizar operaciones con ellas, planteando ecuaciones del tipo $ax \pm b = cx \pm d$. Como consecuencia, todo ello implica un NRA 3.

Figura 12. *Ejemplo de asignación de NRA a un nuevo problema por el participante P60*
 Nota: fuente propia de la investigación.



representación (simbólica), implícitos en la probabilidad condicionada.

Se observaron mejores resultados en el Problema 2, siendo mayor el porcentaje de participantes que asigna correctamente el NRA (24,2 %). Los NRA reconocidos de forma correcta son el NRA 3 (9,1 %) y el NRA 0 (7,6 %). Un ejemplo del reconocimiento correcto y justificado del NRA 3 es el de P60 (Figura 12). Estos resultados son similares a los que obtiene Tizón-Escamilla y Burgos (2023), donde más de la mitad de las futuras persons docentes no identificaron correctamente el NRA implicado en la resolución de problemas creados, que involucraban un razonamiento proporcional en un contexto de probabilidad.

Conclusiones

En este trabajo se presentan los resultados de una acción formativa, en el contexto de la formación de profesorado de matemáticas, dirigida a desarrollar la competencia de resolución y creación de problemas sobre tablas estadísticas y asignación de niveles de razonamiento algebraico a sus resoluciones. Dicha acción formativa responde a la necesidad de diseñar e implementar

propuestas didácticas que ofrezcan oportunidades de aprendizaje matemático efectivo para las futuras personas docentes (Baumanns y Rott, 2022; Silber y Cai, 2021). En tal sentido, la acción formativa implementada ha ofrecido oportunidades de aprendizaje a profesores de matemática en formación y un espacio para el desarrollo de las competencias referidas.

Para evaluar los conocimientos y competencias adquiridas se plantearon tres preguntas de investigación alusivas al desarrollo de las competencias mencionadas. En relación con la primera ¿cómo resuelven y qué nivel de razonamiento algebraico muestran los futuros profesores de matemáticas en problemas que involucran tablas estadísticas?), quienes participaron evidencian un buen conocimiento matemático en la resolución de los problemas, al utilizar NRA avanzados.

Sin embargo, paradójicamente se observaron mejores resultados en la resolución del Problema 1 que involucraba la probabilidad condicionada y completar una tabla de doble entrada, siendo ambas acciones más complejas que las necesarias para resolver el Problema 2, cuyo resultado se puede obtener utilizando procedimientos meramente

Tabla 4. *Frecuencia y porcentaje de asignación de los NRA y corrección de los nuevos problemas*

NRA	Problema 1				Problema 2			
	Nivel asignado		Nivel asignado correctamente		Nivel asignado		Nivel asignado correctamente	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Nivel 0					6	9,1	5	7,6
Nivel 1					3	4,5	1	1,5
Nivel 2	8	12,1			4	6,1	3	4,5
Nivel 3	16	24,2			11	16,7	6	9,1
Nivel 4	2	3,0	1	1,5	1	1,5		
Nivel 5	1	1,5	1	1,5	1	1,5	1	1,5
Nivel 6								
Total	27	40,9	2	3,0	26	39,4	16	24,2

Nota: fuente propia de la investigación.



aritméticos con NRA 0 (Figura 5). No obstante, el enunciado del problema fomentó el uso de un procedimiento que requería revertir el algoritmo de la media aritmética, lo cual fue difícil, al igual que en [Molero *et al.* \(2019\)](#). Este resultado sugiere que la adquisición de un nivel adecuado de razonamiento algebraico no implica necesariamente el desarrollo paralelo del razonamiento estadístico, al cual debiera prestarse mayor atención en futuras acciones formativas.

Respecto a la segunda pregunta de investigación (¿cómo modifican estos problemas los futuros profesores para crear otros nuevos?), las personas participantes fueron capaces de crear nuevos problemas a partir de los propuestos inicialmente. La mayoría formuló problemas nuevos dirigidos a la construcción de tablas, en algunos casos, a partir de enunciados verbales. Asimismo, la mayoría priorizó la creación de problemas que involucraran tablas de doble entrada y tablas de datos, en línea con los problemas propuestos.

En lo relativo a la tercera pregunta (¿cuál es el nivel de razonamiento algebraico implícito en las resoluciones de los problemas propuestos que es reconocido por los futuros profesores?), a pesar de reconocer niveles altos de NRA en los problemas planteados, presentaron grandes dificultades en su correcta identificación y justificación, así como lo observado por [Tizón-Escamilla y Burgos \(2023\)](#).

En resumen, la acción formativa implementada con profesores de matemática en formación ha permitido observar un desarrollo parcial de las competencias de resolución y creación de problemas, caracterizados por el uso de tablas estadísticas, así como de la competencia de análisis en el reconocimiento de NRA implicados en tales resoluciones. Asimismo, se ha podido observar

la necesidad de mejorar la acción formativa de modo que permita un desarrollo más completo tanto de creación de problemas, como de análisis de los NRA, que forman parte del análisis de las prácticas operativas y discursivas involucradas en la resolución de problemas y reconocimiento de los objetos y procesos matemáticos que surgen de dichas prácticas en el modelo CCDM ([Font *et al.*, 2022](#); [Godino *et al.*, 2017](#)).

En este orden de ideas, consideramos que los resultados mostrados constituyen un aporte de interés para un incipiente ámbito de estudio como lo es la resolución y rediseño de problemas, que involucran el uso de tablas estadísticas para el desarrollo de competencias profesionales del profesorado de matemáticas en formación.

Para finalizar, reconocemos las limitaciones del estudio realizado, tanto por el tamaño de la muestra, como por el tipo de problemas trabajados, lo cual implica asumir el compromiso para continuar en el desarrollo de esta línea de investigación, analizando otros problemas en que, junto al conocimiento algebraico, se requiera poner en práctica en mayor medida el conocimiento estadístico. De igual manera, animamos a otros investigadores a proseguir, con el fin de que avancen en la obtención de resultados más específicos y pertinentes que permitan contribuir a la mejora de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesorado.

Financiamiento

PID2022-139748NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE. Fondo de enlace RED2199, proyecto fortalecimiento de la investigación y la formación avanzada en educación en el sistema de universidades estatales RED 21995, PFUE 2021.



Conflicto de intereses

Las personas autoras declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de las personas autoras

Todas las autoras afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo. Los roles según CRediT fue: J. D. P.: conceptualización, curación de datos, análisis formal, metodología, redacción – revisión y edición. C. B.: análisis formal; redacción - borrador original, redacción - revisión y edición. M. R.: validación, revisión y edición, recursos, visualización. O. V.: revisión y edición, visualización.

El porcentaje total de contribución de este artículo fue el siguiente: J. D. P.: 30 %, C. B.: 30 %, M. R.: 20 % y O. V.: 20 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [J. D. P.], previa solicitud razonable.

Preprint

Una versión preprint de este artículo fue depositada en: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13384516>

Referencias

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M. y Rodríguez-Muñiz, L. (2021). What mathematical knowledge do prospective teachers reveal when creating and solving a probability problem? *Mathematics*, 9(24), 3300. <https://doi.org/10.3390/math9243300>

- Baumanns, L. y Rott, B. (2022). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 251-269. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y>
- Burgos, M. y Chaverri-Hernández, J. J. (2022). Knowledge and competencies of prospective teachers for the creation of proportionality problems. *Acta Scientiae*, 24, 270-306. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7061>
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria, *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 18, 1-20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255>
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en problemas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44, 1-22. <https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013>
- Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101391. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. En F. Singer, F. N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1
- Elgrably, H. y Leikin, R. (2021). Creativity as a function of problem-solving expertise: Posing new problems through investigations. *ZDM – Mathematics Education*, 53(4), 891-904. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01228-3>
- Fernandes, J. A., Gonçalves, G. y Barros, P. M. (2021). Uso de tabelas de frequências por futuros professores na realização de trabalhos de projeto. *Uniciencia*, 35(1), 139-151. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.9>
- Fernandes, J. y Barros, P. M. (2022). Leitura e interpretação de tabelas de frequências por futuros professores dos primeiros anos escolares. *PARADIGMA*, 43, (2) 364-386. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p364-386.id1143>



- Font, V., Sánchez, A. y Sala, G. (2022). Prospective teachers' narrative analysis using the didactic-mathematical knowledge and competences model (DMKC). En Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Advances in the anthropological theory of the didactic* (pp. 147-153). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_13
- Gea, M. M., Gossa, A., Batanero, C. y Díaz-Pallauta, J. (2020). Construcción y lectura de la tabla de doble entrada por profesores de educación primaria en formación. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(1), 348-370. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p348-370>
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Aula Magna. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/93596>
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>
- König, J., Blömeke, S., Jentsch, A., Schlesinger, L., née Nehls, C. F., Musekamp, F. y Kaiser, G. (2021). The links between pedagogical competence, instructional quality, and mathematics achievement in the lower secondary classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 189-212. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10021-0>
- Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *Spirale-Revue de Recherches en Éducation*, 32(32), 143-154. <https://doi.org/10.3406/spira.2003.1386>
- Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: Developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(4), 341-361. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-09425-w>
- Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861-2866). CERME.
- Mallart, A., Font, V. y Díez, J. (2018). Case study on mathematics pre-service teachers' difficulties in problem posing. *EURASIA*, 14(4). <https://doi.org/10.29333/ejmste/83682>
- Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/2418>
- Mejía, D., Ocaña, J. y Romero, R. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Edelvives.
- Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante Matemática 7º básico*. SM.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. MEFP.
- Molero, A., Gea, M. M. y Batanero, C. (2019). ¿Qué conocimientos de la media aritmética tienen los estudiantes al inicio de la educación secundaria? En J. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 423-432). SEIEM.
- National Center for Education Statistics. (2017). *Adult literacy and life skills survey*. <https://nces.ed.gov/surveys/all/index.asp>



- Pallauta, J. D., Rivas, M., Batanero, C. y Gea, M. M. (En prensa). Razonamiento algebraico de profesores en formación. *Redimat*.
- Pallauta, J., Arteaga, P., Gea, M. y Begué, N. (2022). Understanding statistical tables: A survey of research. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 38(2), 108-129.
- Pallauta, J., Gea, M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2023). Algebraization levels of activities linked to statistical tables in Spanish secondary textbooks. En G. Burrill, L. Oliveira Souza y E. Reston (Eds.), *Data and statistical thinking: An international perspective* (pp. 317-339). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_23
- Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de problemas. *RELIME*, 19(1), 71-98. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1913>
- Schreier, M. (2014). Qualitative content analysis. En U. Flick (Ed.), *The Sage handbook of qualitative data analysis* (pp. 170-183). Sage. <https://doi.org/10.4135/9781446282243>.
- Shreiner, T. L. (2018). Data literacy for social studies: Examining the role of data visualizations in k-12 textbooks. *Theory & Research in Social Education*, 46(2), 194-231. <https://doi.org/10.1080/00933104.2017.1400483>
- Silber, S. y Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students' mathematical problem posing. *ZDM, Mathematics Education*, 53(4), 877-889. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01272-z>
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Tatto, M. T. y Senk, S. (2011). The mathematics education of future primary and secondary teachers: methods and findings from the teacher education and development study in mathematics. *Journal of Teacher Education*, 62(2), 121-137. <https://doi.org/10.1177/0022487110391807>
- Tizón-Escamilla, N. y Burgos, M. (2023). Creation of problems by prospective teachers to develop proportional and algebraic reasonings in a probabilistic context. *Education Sciences*, 13(12), 1186. <https://doi.org/10.3390/educsci13121186>
- Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. y Nieveen, N. (2006). *Educational design research*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203088364>
- Wasserman, N.H., Buchbinder, O. y Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM Mathematics Education*, 55, 719-736. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5>
- Watson, J. y Callingham, R. (2014). Two-way tables: Issues at the heart of statistics and probability for students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(4), 254-284. <https://doi.org/10.1080/10986065.2014.953019>
- Zhang, H. y Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: Insights from an analysis of teaching cases. *ZDM, Mathematics Education*, 53(4), 961-973. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01260-3>



Competencia de las futuras personas docentes en resolución, creación y razonamiento algebraico de problemas sobre tablas estadísticas (Jocelyn D. Pallauta • Carmen Batanero • Mauro Rivas • Osmar Vera) *Uniciencia* is protected by Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-NC-ND 3.0)