Uniciencia Vol. 39(1), pp. 1-24, January-December, 2025
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

Razonamiento proporcional en la resolución de tareas de cuantificación del espacio muestral y comparación de probabilidades por alumnos de Educación Primaria

Proportional Reasoning in Solving Sample Space Quantification and Probability Comparison Tasks by Primary School Students

Raciocínio proporcional na resolução de tarefas de quantificação de espaço amostral e comparação de probabilidades por alunos do Ensino Fundamental

María Burgos[1], **Nicolás Tizón-Escamilla**[1], **María del Mar López-Martín**[2]*

Received: Sep/9/2024 • Accepted: Apr/8/2025 • Published: Nov/30/2025

Resumen

El razonamiento proporcional es considerado un elemento clave del razonamiento probabilístico. Diversas investigaciones señalan que un razonamiento proporcional insuficiente puede ser la causa de muchos errores cometidos por los estudiantes en el ámbito de la probabilidad. **[Objetivo]** El objetivo de este estudio es identificar el razonamiento proporcional que desarrollan estudiantes de sexto de Educación Primaria (11-12 años) al resolver tareas de cuantificación del espacio muestral y comparación de probabilidades. **[Metodología]** Mediante un enfoque cualitativo exploratorio, se analizaron las respuestas de 47 estudiantes españoles de un centro educativo público a dos problemas: uno orientado a la comparación de probabilidades (comparación de razones) y otro centrado en la determinación de la composición de una caja para generar probabilidades iguales (reparto proporcional). El análisis de las soluciones por medio de las funciones semióticas permite identificar las relaciones entre los objetos implicados en las prácticas y los elementos característicos del razonamiento proporcional facilitando la interpretación de los errores de los estudiantes. **[Resultados]** Los resultados muestran que los estudiantes de primaria tuvieron dificultades al seleccionar la caja con mayor probabilidad de éxito, lo que evidencia un razonamiento proporcional insuficiente. Sin embargo, la mayoría logró determinar de manera adecuada la composición de una caja para mantener una probabilidad dada, aunque en pocos casos justificaron sus procedimientos con base en la probabilidad o proporcionalidad. **[Conclusiones]** Los resultados contrastan con hallazgos de investigaciones previas y muestran dificultades no identificadas previamente en la resolución de problemas de reparto proporcional en contexto probabilístico o incluso aritmético.

* autor para correspondencia
María Burgos, mariaburgos@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-4598-7684
Nicolás Tizón-Escamilla, tizon@ugr.es, https://orcid.org/0000-0003-3221-7928
María del Mar López-Martín, mdm.lopez@ual.es, https://orcid.org/0000-0001-8677-9606
1 Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España.
2 Departamento de Educación, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Almería, España.

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

Palabras clave: razonamiento proporcional; razonamiento probabilístico; urnas; enfoque ontosemiótico; educación primaria.

Abstract

Proportional reasoning is considered a key element in probabilistic reasoning. Various studies have suggested that insufficient proportional reasoning may be the cause of many errors made by students when dealing with probability problems. **[Objective]** The aim of this study is to identify the proportional reasoning used by sixth grade students (11-12 years old) when solving sample space quantification and probability comparison tasks. **[Methodology]** Through an exploratory qualitative approach, the responses of 47 Spanish students from a public school were analyzed in relation to two problems: one focused on comparing probabilities (ratio comparison), and the other on determining the composition of a box to generate equal probabilities (proportional distribution). The analysis of the solutions using semiotic functions allows identification of relationships between objects involved in the tasks and the characteristic elements of proportional reasoning, facilitating interpretation of students' errors. **[Results]** The results show that the students struggled to select the box with the highest probability of success, which indicates insufficient proportional reasoning. However, most students were able to correctly determine the composition of a box needed to maintain a given probability, whereas few could justify their reasoning based on probability or proportionality. **[Conclusions]** The results contrast with previous research findings and show previously unidentified difficulties in solving proportional distribution problems in a probabilistic or arithmetic context.

Keywords: Proportional reasoning; probabilistic reasoning; urns; ontosemiotic approach; primary education.

Resumo

O raciocínio proporcional é considerado um elemento-chave do raciocínio probabilístico. Pesquisas indicam que o raciocínio proporcional insuficiente pode ser a causa de muitos erros cometidos pelos alunos no campo da probabilidade. [**Objetivo]** O objetivo deste estudo é identificar o raciocínio proporcional desenvolvido por alunos do sexto ano do Ensino Fundamental (11-12 anos de idade) ao resolverem tarefas de quantificação do espaço amostral e comparação de probabilidades. [**Metodologia]** Usando uma abordagem qualitativa exploratória, foram analisadas as respostas de 47 alunos espanhóis de uma escola pública a dois problemas: um orientado para a comparação de probabilidades (comparação de proporções) e o outro focado na determinação da composição de uma caixa para gerar probabilidades iguais (divisão proporcional). A análise das soluções por meio de funções semióticas permite identificar as relações entre os objetos envolvidos nas práticas e os elementos característicos do raciocínio proporcional, facilitando a interpretação dos erros dos alunos. [**Resultados]** Os resultados mostram que os alunos do ensino fundamental tiveram dificuldades em selecionar a caixa com maior probabilidade de sucesso, o que é evidência de raciocínio proporcional insuficiente. No entanto, a maioria foi capaz de determinar adequadamente a composição de uma caixa para manter uma determinada probabilidade, embora em poucos casos tenham justificado seus procedimentos com base na probabilidade ou proporcionalidade. [**Conclusões]** Os resultados contrastam com as constatações de pesquisas anteriores e mostram dificuldades não identificadas anteriormente na solução de problemas de divisão proporcional em um contexto probabilístico ou, inclusive, aritmético.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

Palavras-chave: raciocínio proporcional; raciocínio probabilístico; urnas; abordagem ontosemiótica; ensino fundamental.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Introducción

Diversos autores y propuestas curriculares defienden la importancia de incorporar el estudio de la probabilidad desde la Educación Primaria, aprovechando las intuiciones de los escolares y avanzando hacia la descripción, cuantificación y modelización de la incertidumbre por medio de la probabilidad (ACARA, 2014; CCSSI, 2015; MEFP, 2022; Pratt y Kazak, 2018).

Aunque los escolares se encuentran con situaciones aleatorias desde que pequeños, las ideas asociadas a la probabilidad no están tan vinculadas a su experiencia directa como lo están las nociones aritméticas o geométricas, ni permiten ser manipuladas para dar un resultado concreto (Batanero *et al*., 2021). Así, la enseñanza de la probabilidad desde los primeros niveles educativos persigue que los alumnos progresen hasta manejar el lenguaje básico referente a la posibilidad de ocurrencia, comprender la noción de experimento aleatorio y utilizar la probabilidad bajo sus distintos significados (intuitivo, laplaciano, frecuentista y subjetivo), conociendo las relaciones y diferencias entre ellos (MEFP, 2022).

Numerosas investigaciones (Batanero *et al*., 2021; Batanero y Borovnick, 2016; Batanero *et al*., 2016) indican que los niños de las primeras etapas educativas son capaces de utilizar la información probabilística para formar juicios de valor, tomar decisiones, hacer predicciones, orientar la búsqueda de información, generalizar e incluso desarrollar inferencias coherentes con los principios generales de la inferencia bayesiana (Gopnik, 2012).

Algunas investigaciones analizan de manera explícita la relación entre capacidades vinculadas al sentido numérico y competencia para razonar probabilísticamente (Supply *et al*., 2020). En particular, trabajos como los de Bryant y Nunes (2012), Cañizares (1997), Langrall y Mooney (2005) o Van Dooren (2014) muestran que el razonamiento proporcional es un factor clave en la capacidad de los niños para comprender y aplicar conceptos probabilísticos.

La estrecha relación existente entre el razonamiento proporcional y probabilístico ha sido considerada como un factor clave en la capacidad de los niños para resolver con éxito tareas de comparación de probabilidades en contexto de urnas (Cañizares, 1997; Hernández-Solís *et al*., 2021a, 2021b, 2023; Truran, 1994). Sin embargo, son menos frecuentes los trabajos que investigan la influencia del razonamiento proporcional en la construcción del espacio muestral (Hernández-Solís *et al*., 2021b, 2021c, 2024; Supply *et al*., 2020, 2023) y casi inexistentes aquellas que contemplan tareas de valor faltante o de reparto en el contexto probabilístico (Supply *et al*., 2020, 2023). Además, investigaciones como las de Supply *et al.* (2020, 2023) tienen lugar con estudiantes que aún no han recibido instrucción formal sobre proporcionalidad o probabilidad.

Al tener en cuenta este vacío en la investigación, nuestro objetivo es indagar el razonamiento proporcional que ponen en juego alumnos al final de la Educación Primaria al resolver tareas que involucran dos

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

componentes esenciales del razonamiento probabilístico: (1) la cuantificación y comparación de probabilidades, (2) la determinación del espacio muestral para crear probabilidades iguales (Bryant y Nunes, 2012; Supply *et al*., 2020).

En la primera de ellas deben escoger entre dos cajas, aquella en la que es mayor la probabilidad de éxito. En la segunda, deben determinar la composición de una caja (con número de casos posibles conocido) para que la probabilidad de éxito sea la misma que en otra caja cuya razón entre casos favorables y desfavorables es conocida. Desde el punto de vista del razonamiento proporcional involucrado, la primera tarea implica una comparación de razones, mientras que la segunda supone un reparto proporcional. Prestar atención a las conexiones entre razonamiento proporcional y probabilístico puede ser de utilidad tanto para explicar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la probabilidad, como para identificar aspectos que pueda mejorar su enseñanza. Se plantean las preguntas de investigación:

1. ¿Qué estrategias emplean los alumnos y que dificultades se observan en sus resoluciones a las tareas propuestas?
2. ¿Qué relación existe entre el nivel de pertinencia de las soluciones a ambas tareas, así como con la presencia de elementos propios del razonamiento proporcional en las prácticas desarrolladas por los estudiantes?

Para identificar los conocimientos clave que se requieren para dar respuesta a los problemas planteados, empleamos la noción de función semiótica desarrollada en el marco del Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2024).

Este constructo se recoge en la sección destinada al marco teórico, donde además se incluyen los antecedentes fundamentales sobre razonamiento proporcional y probabilístico. En la sección de metodología se presentan el contexto, el método de investigación y las tareas de evaluación propuestas. A continuación, la sección dedicada al análisis *a priori* e identificación de funciones semiótica, muestra soluciones a los problemas propuestos identificando las funciones semióticas esenciales implicadas en cada estrategia, con la intención de disponer de indicadores que faciliten tanto el análisis de desempeño en la resolución por parte de los estudiantes (funciones semióticas que se aplican correctamente) como la identificación de las dificultades (desajustes en el establecimiento de funciones semióticas). Finalmente, en las dos últimas secciones se presentan, respectivamente, los resultados de la investigación y las conclusiones que de ellos se derivan.

Fundamentación teórica

La noción de función semiótica en el EOS

Dos nociones básicas del EOS son las de práctica matemática y significado pragmático. Se entiende por *práctica matemática* toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos. En las prácticas matemáticas aparecen involucrados y emergen objetos, entendidos como cualquier entidad que esté involucrada de alguna forma en la actividad matemática y que pueda separarse o individualizarse según su naturaleza o función.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

El *significado sistémico-pragmático* de un objeto se concibe como el sistema de prácticas operativas y discursivas que realiza una persona (significado personal) o institución (significado institucional), entendida esta última como grupo de personas expertas involucradas en una misma situación, para resolver un tipo de problemas matemáticos. Así, en el EOS la comprensión se interpreta "en términos de acoplamiento progresivo de los significados personales del sujeto con los institucionales de referencia" (Godino, 2024, p. 79).

El constructo *conflicto semiótico* permite identificar momentos en los que ocurren desajustes en el proceso de acoplamiento de significados. Describe cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales se habla de *conflicto semiótico de tipo epistémico*, mientras que, si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, se considera *conflicto semiótico cognitivo.* De esta forma, los errores de los estudiantes se interpretan como manifestaciones de estos conflictos semióticos de tipo cognitivo (Godino, 2024).

Para analizar los conocimientos puestos en juego en la resolución de las tareas recurrimos a la noción de *función semiótica* del EOS, entendida como la correspondencia entre un objeto significante (antecedente, expresión) y otro significado (consecuente, contenido) establecida por un sujeto (persona o institución), según un criterio o regla de correspondencia que relaciona expresión y contenido (interpretante).

Toda entidad que participa en un proceso de semiosis o interpretación es objeto (unitario o sistémico), pudiendo desempeñar el papel de significante, significado o regla en una función semiótica. Los propios sistemas de prácticas operativas y discursivas son objetos y pueden ser componentes de la función semiótica. De este modo se modeliza cualquier uso que se pueda dar a la palabra significado: el significado es el contenido de una función semiótica (Godino, 2024).

El constructo función semiótica permite describir de forma detallada y operativa el conocimiento matemático como el conjunto de relaciones que el sujeto (persona o institución) establece entre los objetos y las prácticas matemáticas. De esta forma, "hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre los diversos tipos de prácticas y objetos" (Godino, 2024, p. 79). También, posibilita interpretar y explicar conflictos cognitivos y errores de los estudiantes como desajustes en el establecimiento de la relación entre expresión y contenido de funciones semióticas (Batanero y Díaz, 2007).

Razonamiento probabilístico y razonamiento proporcional

A lo largo de la historia se han considerado diferentes interpretaciones del concepto de probabilidad (intuitiva, clásica, frecuencial, subjetiva y axiomática) que coexisten en la actualidad y aparecen reflejados en el currículo de matemáticas (Borovnick y Kapadia, 2014; MEFP, 2022). En nuestro caso, centramos la atención en el significado clásico, que considera la probabilidad como la proporción entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables (Borovcnik y Kapadia, 2014).

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Desde la perspectiva pragmática del EOS, se entiende el *razonamiento probabilístico* como el sistema de acciones (prácticas operativas y discursivas) puestas en juego en la resolución de problemas de probabilidad. En estas prácticas intervienen objetos y procesos característicos de los diferentes significados de la probabilidad (Batanero y Díaz, 2007).

En particular, el razonamiento probabilístico involucra una serie de conceptos básicos de la probabilidad: comprensión de la aleatoriedad; elaboración del espacio muestral; probabilidad experimental y teórica; estimación, cuantificación y comparación de probabilidades; y comprensión de la correlación (Bryant y Nunes, 2012; Langrall y Mooney, 2005). La comprensión del espacio muestral requiere reconocer todos los posibles resultados de un experimento, describirlos en forma completa y relacionar el espacio muestral con la mayor o menor posibilidad de cada resultado del experimento (Horvath y Lehrer, 1998).

Aunque son múltiples las investigaciones que analizan el desarrollo del razonamiento probabilístico en escolares (Hernández-Solís *et al*., 2023; Supply *et al*., 2020), centramos la atención en aquellas que de manera explícita analizan el vínculo de la comprensión del espacio muestral y la cuantificación/comparación de probabilidades con el razonamiento proporcional.

El *razonamiento proporcional*, como secuencia de prácticas matemáticas desarrolladas en la resolución de problemas de proporcionalidad, involucra simultáneamente la covarianza de las cantidades y la invarianza de las razones. Esto supone la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades (Lamon, 2007).

Por un lado, para Van Dooren *et al*. (2003) la relación entre proporciones y probabilidades se explica con base en la distinción entre la intuición primaria del azar, referida a la igualación de probabilidades, y el concepto de azar entendido como el cálculo explícito y correcto de probabilidades. Por otro, el razonamiento proporcional es considerado un elemento esencial del razonamiento probabilístico, pues forma parte del análisis del espacio muestral, de la cuantificación de las probabilidades, del estudio de la variable aleatoria y el muestreo y de la comprensión y uso de las correlaciones (Batanero y Borovnick, 2016; Bryant y Nunes, 2012).

Un razonamiento proporcional insuficiente puede estar detrás de gran parte de los errores conceptuales y procedimentales en el ámbito de la probabilidad (Begolli *et al*., 2021; Bryant y Nunes, 2012; Langrall y Mooney, 2005; Van Dooren, 2014). Esto puede venir motivado, tanto por la complejidad intrínseca a la modelización de situaciones probabilísticas (similitud física entre espacios de medida, naturaleza intangible de la probabilidad) que se ve obstaculizada por las intuiciones, sesgos o concepciones erróneas previas de los estudiantes, como por la estrecha conexión, cognitiva e intuitiva, de las nociones de azar y proporción (Supply *et al*., 2023; Van Dooren *et al*., 2003). Además, el razonamiento proporcional tiene un papel decisivo en la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo. En este proceso, la estrategia aditiva (basada en calcular la diferencia entre las cantidades dadas y emplearlas en el cálculo de la cantidad desconocida) es el procedimiento incorrecto más frecuente utilizado por los estudiantes en la resolución de problemas de proporcionalidad (Fernández *et al*., 2024).

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Hernández-Solís y colaboradores, analizan las estrategias y errores de niños costarricenses de 11-12 años cuando resuelven tareas de comparación de probabilidades y construcción del espacio muestral en el contexto de urnas (Hernández-Solís *et al*., 2021a, 2021b) y de ruletas (Hernández-Solís *et al*., 2021b, 2021c).

Para los autores la dificultad observada en los estudiantes en tareas de comparación de probabilidades en urnas se debe a que, aunque los alumnos estudian fracciones y realizan comparaciones de fracciones, no es frecuente utilizar el contexto de probabilidad para completar su estudio de fracciones y realizar comparaciones. Si bien construir un espacio muestral a partir de ciertas condiciones iniciales, plantea un desafío para los alumnos al no ser una tarea con la que están familiarizados (Hernández-Solís *et al*., 2021b), los resultados de su estudio muestran una intuición razonable de la idea de espacio muestral tanto en el contexto de urnas como de ruletas.

Así, la mayoría de los participantes construyen correctamente un espacio muestral cuando en la tarea la condición se establece sobre un suceso posible o un suceso equiprobable. Se observan, sin embargo, dificultades cuando se parte de un suceso imposible o de uno seguro.

Trabajos recientes, como los de Batanero *et al*. (2023) y Hernández-Solís *et al*. (2024), investigan la relación del nivel de razonamiento proporcional (desde el punto de vista de la dificultad de las tareas) y el éxito en tareas de comparación de probabilidades y la determinación del espacio muestral en estudiantes de entre 11 y 16 años.

Específicamente, Batanero *et al*. (2023) analizan cómo estudiantes costarricenses y españoles abordan tareas de comparación de probabilidades (contexto de urnas) y razones (contexto de mezclas), diseñadas con distintos niveles de dificultad en términos del razonamiento proporcional, observando que pocos de los participantes utilizaron estrategias multiplicativas, lo que les impidió resolver correctamente los problemas de mayor complejidad.

Hernández-Solís *et al*. (2024) por su parte, analizan la relación entre el nivel de razonamiento proporcional (comparación de razones en contexto de mezclas) y la construcción del espacio muestral (contexto de urnas y de ruletas) en estudiantes costarricenses. Los resultados indican una relación entre el éxito en la construcción de espacios muestrales y el nivel de razonamiento proporcional alcanzado, así como un incremento progresivo, según el curso, en el porcentaje de estudiantes que logra niveles más altos de este tipo de razonamiento.

Aunque la mayoría de investigaciones previas sobre razonamiento proporcional de escolares en un contexto aritmético se han centrado en tareas de valor faltante (Castillo y Fernández, 2022), estudios recientes han analizado las estrategias, las dificultades, el efecto de las variables del problema y los niveles de logro de escolares cuando resuelven problemas sobre comparación de razones (Castillo y Fernández, 2022) y, en menor medida, en problemas de reparto proporcional (Yeong *et al*., 2020).

Los resultados de estos trabajos muestran que las dificultades en la comprensión de la razón, en particular, la identificación de la relación multiplicativa o la comparación de referentes, se mantienen incluso hasta el final de Educación Secundaria, así como la comprensión limitada del "todo" (suma de las partes) o la tendencia a realizar repartos equitativos en situaciones de reparto proporcional (Sánchez Ordoñez, 2014; Yeong *et al*., 2020).

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

En el contexto probabilístico, Supply *et al*. (2023) propusieron a niños de 8-9 años, una tarea de valor faltante, en la que una de las cajas tiene una distribución conocida, en la otra se dan los casos desfavorables y deben completarla con los casos favorables para que ambas cajas tengan igual probabilidad de éxito. La mayoría de las respuestas erróneas encontradas seguían estrategias unidimensionales.

Observaron que la mayor dificultad en el contexto probabilístico frente al aritmético (reparto equitativo) en situaciones de valor faltante, puede venir motivado, entre otros aspectos, por la presencia de incertidumbre, el carácter intangible de la probabilidad (cantidad intensiva) y por la similitud física entre los espacios de medida.

Metodología

El estudio se enmarca en una investigación descriptiva de enfoque cualitativo y de tipo exploratorio, pues la muestra utilizades es no aleatoria (selección intencionada atendiendo a la disponibilidad del centro y los escolares) y moderada en tamaño (McMillan y Schumacher, 2005).

Para analizar la actividad matemática desarrollada por los participantes en la resolución de las dos tareas aplicamos el análisis ontosemiótico (Godino *et al*., 2021): 1) descomposición de la actividad en unidades de análisis, formadas por las prácticas operativas o discursivas elementales, 2) identificación de la intencionalidad de la actividad que se analiza, reconocimiento de las funciones semióticas elementales, y 3) reconocimiento de los conflictos semióticos, entendidos como desajustes en el establecimiento de funciones semióticas.

Parte del equipo investigador, realizó, de manera independiente, el análisis descriptivo de las producciones de los participantes, contrastando con los resultados de investigaciones previas en relación con estrategias reconocidas. A continuación, se discutieron con el resto de los investigadores las posibles discrepancias y se consensuaron las categorías resultantes del análisis, en un proceso cíclico e inductivo, propio de la investigación cualitativa. De igual forma, se discutieron y acordaron los criterios de puntuación para valorar la pertinencia de las respuestas a cada una de las tareas propuestas.

En la experiencia participaron 47 estudiantes del último curso (sexto) de Educación Primaria (11-12 años), todos del mismo centro educativo público de la ciudad de Almería (España) que han recibido la formación institucional prevista en proporcionalidad y probabilidad.

El protocolo de recogida de datos comenzó con una reunión con la directora y los tutores del centro, en la que se explicaron los objetivos, el proceso y las condiciones de la investigación, así como las tareas por realizar por parte de los estudiantes (ver cuadro 1).

Los estudiantes habían estudiado el tema de proporcionalidad y porcentajes (noción de magnitudes proporcionales y procedimientos estándares de resolución, como reducción a la unidad y regla de tres) y de probabilidad. De las entrevistas informales a los tutores de los alumnos, así como de la exploración inicial en el aula a través de preguntas elementales sobre probabilidad, se observó deficiencias en el conocimiento de los escolares con relación a los contenidos de probabilidad. Si bien dominaban el lenguaje probabilístico (aleatorio, probable, suceso seguro, posible o imposible) desconocían la noción de espacio muestral y mostraban dudas con el cálculo de probabilidades elementales.

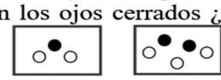
Antes de iniciar la actividad, se informó a los estudiantes de que esta no influiría

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

Cuadro 1. *Tareas de evaluación propuestas a los alumnos de Educación Primaria.*

Problema 1. En la caja A hay 2 bolas blancas y una negra. En la caja B hay tres bolas blancas y 2 negras. Se mueven las cajas y se saca una bola con los ojos cerrados ¿en cuál es más probable sacar una bola blanca? Explica tu respuesta.



Caja A Caja B

Problema 2. Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si es igual de probable sacar una bola blanca que en la caja A? Explica tu respuesta.

Nota: fuente propia de la investigación.

en sus evaluaciones académicas, pero que su participación era fundamental para el estudio. Se les pidió que resolvieran las tareas que aparecen en el cuadro 1 de manera individual en el tiempo de 60 minutos.

En el problema 1, se deben comparar probabilidades para elegir la caja en la que es mayor la probabilidad de éxito. Al atender a la composición, es posible establecer una relación multiplicativa inmediata dentro de la caja A, doble de bolas blancas que de negras; si bien, en la caja B no hay una relación multiplicativa entre casos favorables y desfavorables.

La relación multiplicativa entre cajas, por otro lado, es inmediata entre casos desfavorables, pero no entre favorables ni posibles. La ausencia de relaciones enteras podría motivar el uso de estrategias aditivas erróneas por parte de los estudiantes (Fernández *et al*., 2024).

En el problema 2, se debe determinar proporcionalmente la composición de la caja B, para que la probabilidad de éxito sea la misma que en la caja A, cuya razón entre casos favorables y desfavorables es conocida. La razón dada en la composición de la caja A, permite facilitar el agrupamiento, identificando estrategias habituales en problemas de reparto proporcional en el contexto aritmético (Ben Chaim *et al*., 2012).

El análisis de las soluciones a dichas tareas tanto desde el punto de vista epistémico (soluciones expertas de referencia e identificación de las funciones semióticas críticas) como cognitivo (soluciones dadas por los alumnos) tiene un carácter interpretativo y contextual. Los tipos de estrategias de los estudiantes emergen del análisis de sus prácticas cuando responden a las tareas, tratándose, por tanto, de un análisis cualitativo. Por otra parte, el análisis del grado de pertinencia de las respuestas a dichas tareas con relación a las estrategias permite extraer información sobre la relación entre dichas variables.

Análisis *a priori* e identificación de funciones semiótica

A continuación, mostramos soluciones a los problemas propuestos identificando las funciones semióticas esenciales en cada estrategia. Se han considerado aquellas que han tenido mayor presencia en las respuestas de los alumnos. Para simplificar la presentación, la descripción de las funciones semióticas se lleva a cabo por medio de la intención que determina la regla de correspondencia.

Soluciones y funciones semióticas en la solución del problema 1

Solución 1.1. Relación multiplicativa dentro de las cajas. En la caja A hay el doble de bolas blancas que de bolas negras. En la caja B hay menos del doble de bolas blancas que de bolas negras. Dado que la probabilidad

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

es el cociente entre el número de casos favorables y posibles (favorables más desfavorables), es más probable sacar una bola blanca en la caja A que en la caja B. A partir de dicha resolución se identifican las siguientes funciones semióticas fundamentales:

FS1.1.1. Relacionar la probabilidad con la razón de casos favorables a desfavorables. La probabilidad es mayor cuando es mayor la razón de casos favorables a desfavorables.
FS1.1.2. Identificar la relación multiplicativa (doble) entre los casos favorables (bolas blancas) y desfavorables (bolas negras) de la caja A.
FS1.1.3. Identificar la relación multiplicativa (menos del doble) entre los casos favorables (bolas blancas) y desfavorables (bolas negras) de la caja B.
FS1.1.4. Conectar la relación multiplicativa entre casos favorables y desfavorables en una caja, con la probabilidad.

En esta solución se debe reconocer que la probabilidad es mayor en aquella caja en la que es mayor la razón de casos favorables a desfavorables (FS1.1.1) y por tanto, en aquella en la que es mayor la razón unitaria entre estos (FS1.1.4). En efecto, si los casos favorables, f se relacionan de manera multiplicativa con los casos desfavorables, d, es decir $f = k \text{ x } d$ (k razón unitaria), los casos totales, t vienen dados por $t = f + d = k \text{ x } d + d = (k+1) \text{ x } d$, y así:

$$P_A > P_B \Leftrightarrow \frac{f_A}{f_A+d_A} > \frac{f_B}{f_B+d_B} \Leftrightarrow f_A \times d_B > f_B \times d_A \Leftrightarrow \frac{f_A}{d_A} > \frac{f_B}{d_B} \Leftrightarrow k_A > k_B$$

Aunque no es esperable este grado de formalización en las prácticas de niños de 6º curso de primaria, sino una aproximación más intuitiva, desde el punto de vista del profesor-investigador reconocer la fundamentación de los criterios de correspondencia ayudan a tomar conciencia de su complejidad. Así, una vez establecida la función semiótica FS1.1.1, se determina, a partir de la composición de las cajas la relación multiplicativa entre casos favorables y desfavorables en la caja A (FS1.1.2) y en la caja B (FS1.1.3), procediéndose después a compararlas (doble, menos del doble) en función de la razón unitaria (FS1.1.4).

Solución 1.2. Comparación de fracciones. En la caja A hay dos bolas blancas y una negra, es decir, de las tres bolas, dos son blancas, luego la probabilidad de sacar bola blanca en A es $P_A(bola\ blanca) = \frac{f_A}{t_A} = \frac{2}{3}$. En B hay tres bolas blancas y dos negras, esto es, de las cinco bolas, tres son blancas, así, la probabilidad de sacar bola blanca en B es $P_B(bola\ blanca) = \frac{f_B}{t_B} = \frac{3}{5}$. Si comparamos las fracciones, $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ ya que 2 x 5 > 3 x 3 luego es mayor la probabilidad de sacar bola blanca en A. Podemos distinguir las siguientes funciones semióticas esenciales:

FS1.2.1. Relacionar la probabilidad con la razón entre los casos favorables y posibles.
FS1.2.2. Relacionar el número de bolas blancas y totales en A con la probabilidad de sacar bola blanca en la caja A.
FS1.2.3. Vincular el número de bolas blancas y totales en B con la probabilidad de sacar bola blanca en la caja B.
FS1.2.4. Relacionar 2 x 5 > 3 x 3 con que la probabilidad de sacar bola blanca en la caja A, $\frac{2}{3}$, es mayor que la probabilidad de sacar bola blanca en B, $\frac{3}{5}$

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

El problema plantea determinar la caja en la que la probabilidad de extraer bola blanca es mayor. Concebir la probabilidad como razón entre casos favorables a posibles (FS1.2.1) supone, en primer lugar, reconocer en esta composición cuáles son los casos favorables de entre los posibles; es decir, pensar en la caja A como formada por tres bolas de las que dos son bolas blancas y la caja B como formada por cinco bolas de las que tres son blancas.

En segundo lugar, lleva a reconocer el carácter relativo (proporcional) y la posibilidad de comparar probabilidades. A continuación, la relación de Laplace se aplica para determinar la probabilidad de sacar bola blanca en A (FS1.2.2) y bola blanca en B (FS1.2.3). Finalmente, se aplican las propiedades de equivalencia y orden entre fracciones (si a, b, c, d son enteros y b y d son positivos, entonces, $a/b < c/d \Leftrightarrow a \times d < c \times b$) para determinar qué fracción determina la mayor probabilidad (FS1.2.4).

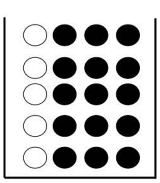
Soluciones y funciones semióticas en la solución del problema 2

Solución 2.1. Reparto aditivo. Para que sea igual de probable sacar bola blanca en la caja B que en la caja A, debe mantenerse la razón entre bolas blancas y bolas negras. Esta razón es de tres bolas negras por cada una que es blanca. Vamos a ir completando la caja B, de manera que cada vez que añadamos una bola blanca, se incorporen también otras tres bolas negras. Este proceso se detendrá cuando el total de bolas, entre negras y blancas sea 20, concluyendo que hay 5 bolas blancas y 15 negras en la caja B:

En esta solución (próxima a la estrategia preformal "aditiva" de Ben-Chaim *et al.*, 2012) intervienen valores particulares del número de bolas blancas y negras que determinan una secuencia aditiva de reparto. Se identifican las siguientes funciones semióticas esenciales:

FS2.1.1. Vincular la igualdad de probabilidad de sacar bola blanca en las cajas con la igualdad de las razones entre casos favorables y desfavorables de ambas.
FS2.1.2. Identificar 20 como el número total de casos posibles en la caja B.
FS2.1.3. Establecer el reparto de bolas en la caja B a partir de la razón: cada vez que se añade una bola blanca se añaden tres negras.
FS2.1.4. Reconocer el total de casos posibles, 20, como el valor que, una vez alcanzado, permite detener el reparto.
FS2.1.5. Identificar en la composición final alcanzada el número de bolas blancas y negras.

La dificultad en este problema radica en que la composición de la caja A no está dada de forma directa, sino a través de la razón entre bolas blancas y negras, por lo que se debe vincular la igualdad de probabilidad de éxito en ambas cajas con la igualdad de las razones entre casos favorables y desfavorables en estas (FS2.1.1). Una vez reconocido el número de casos posibles en B (FS2.1.2), la situación se interpreta como un reparto proporcional con razón 1 *a* 3 (FS2.1.3) hasta completar las 20 bolas a repartir (FS2.1.4). En el diagrama, la última fila determina la composición final de la caja B (FS2.1.5).



⟶	*1 blanca y 3 negras*	→	*4 bolas en la caja B*
⟶	*2 blanca y 6 negras*	→	*8 bolas en la caja B*
⟶	*3 blanca y 9 negras*	→	*12 bolas en la caja B*
⟶	*4 blanca y 12 negras*	→	*16 bolas en la caja B*
⟶	*5 blanca y 15negras*	→	*20 bolas en la caja B*

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Solución 2.2. División por la razón. En la caja A, por cada bola blanca hay tres negras, de manera que, si hubiese 4 bolas, una sería blanca. Puesto que la probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables (bolas blancas) y el de casos posibles (bolas totales), para que sea igual de probable sacar bola blanca en la caja B que en la caja A, se debe mantener la razón entre bolas blancas y bolas totales. Dado que hay 20 bolas en total en la caja B, se pueden formar 5 grupos de 4 bolas, pues 20:4 = 5 . En cada uno de estos grupos, debe haber 1 bola blanca y 3 bolas negras. Como son 5 grupos, esto supone un total de 5 (5 x 1 = 5)bolas blancas en la caja B. El resto, 15 = 20 - 5 , serán bolas negras.

En el proceso de resolución anterior (semejante al de la estrategia de "división por la razón" en los problemas de reparto proporcional en Ben-Chaim *et al*., 2012) se reconoce la razón dada y se establece la relación multiplicativa que existe entre los casos favorables y desfavorables. Identificamos las siguientes funciones semióticas esenciales:

FS2.2.1. Reconocer a partir de la razón "por cada bola blanca tres son negras" la composición mínima, 1 + 3 = 4 (todo unitario parcial).
FS2.2.2. Vincular la igualdad de probabilidad de sacar bola blanca en las cajas con la igualdad de las razones entre casos favorables y posibles de ambas.
FS2.2.3. Identificar el número de casos posibles, 20.
FS2.2.4. Descomponer el total de bolas en la caja B, 20, en 5 grupos de 4, 20 = 4 × 5.
FS2.2.5. Asignar la razón 1(blanca):3(negras) a cada uno de los 5 grupos de 4 bolas.
FS2.2.6. Aplicar la multiplicación (5 × 1 = 5) como suma reiterada para determinar el número de bolas blancas.
FS2.2.7. Identificar el número de bolas negras como la diferencia con el total (20 - 5 = 15).

Como en la solución previa, es necesario vincular la igualdad de probabilidad de éxito en ambas cajas con la igualdad de las razones de casos favorables a posibles en estas (FS2.2.2). La razón de reparto se transforma en una composición (urna equivalente) mínima (FS2.2.1), que permite, una vez identificado el número de casos posibles en B (FS2.2.3), derivar la cantidad de grupos mínimos que lo forman (FS2.2.4). Tras reconocer que la razón 1(blanca):3(negras) se mantiene en cada uno de los grupos (FS2.2.5) es posible determinar el número de bolas blancas en B (FS2.2.6) a partir del número de grupos (1 blanca en cada grupo de 4 bolas). El de bolas negras ya es inmediato a partir del total en B (FS2.2.7).

Solución 2.3. Parte-todo. Para que sea igual de probable sacar una bola blanca en la caja B que en la caja A se debe mantener la razón de bolas blancas (casos favorables) respecto del total de bolas (casos posibles). Dado que esta razón es de una bola blanca por cada cuatro bolas, y en la caja B hay 20 bolas, el número de bolas blancas en la caja B es $\frac{1}{4} \times 20 = 5$. El resto de las bolas en la caja B, esto es, 20 - 5 = 15 serán negras. En esta solución (semejante a la de "parte-todo" en los problemas de reparto proporcional en Ben-Chaim *et al*., 2012) la fracción interviene como operador. Podemos distinguir las siguientes funciones semióticas:

FS2.3.1. Reconocer la probabilidad de sacar bola blanca en la caja como la razón entre los casos favorables (bolas blancas) y posibles (bolas blancas y negras).
FS2.3.2. Transformar la razón "por cada bola blanca tres son negras" en la razón "una bola blanca por cada cuatro bolas".

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

FS2.3.3. Identificar las 20 bolas de la caja B como el todo.
FS2.3.4. Establecer la correspondencia entre la razón de casos favorables a posibles y la fracción de la unidad que corresponde a bolas blancas.
FS2.3.5. Reconocer el uso de fracción como operador (aplicada sobre la cantidad total de bolas en la caja B permite hallar la cantidad de bolas blancas, $\frac{1}{4} \times 20 = 5$).
FS2.3.6. Identificar el número de bolas negras como la diferencia con el total (20 - 5 = 15).

En esta solución se interpreta la probabilidad de éxito como la razón de casos favorables a posibles (FS2.3.1) y se transforma a desfavorables debido a casos favorables a posibles (FS2.3.2). Esto permite una vez reconocido el número de casos posibles en B (FS2.2.3), aplicar la razón como fracción de la unidad (FS2.3.4, FS2.3.5) para determinar la cantidad de bolas blancas de las totales en B. La cantidad de bolas negras se determina directamente del total en B (FS2.3.6).

Resultados

Estrategias de solución y corrección en la solución al problema 1

Todos los alumnos resolvieron el primer problema. El análisis de sus respuestas a partir de las funciones semióticas implicadas nos ha permitido identificar tanto las estrategias empleadas, que ejemplificaremos a continuación, como el nivel de pertinencia (NP) en sus soluciones. Este se codifica como:

NP0. Incorrecta.
NP1. Muestra conocimiento del cálculo de probabilidades, pero no lo emplea para seleccionar la caja A como aquella con mayor probabilidad de sacar bola blanca.
NP2. Emplea razonamiento proporcional para decidir que en la caja A es mayor la probabilidad de extraer bola blanca, pero no justifica o lo hace de forma incorrecta.
NP3. Emplea razonamiento proporcional para decidir que en la caja A es mayor la probabilidad de sacar bola blanca, pero lo justifica de manera parcial o incompleta.

La tabla 1 resume las frecuencias en cada categoría en relación con su grado de pertinencia.

Tabla 1. *Tipos de estrategia y nivel de pertinencia en la respuesta al problema 1 (n = 47)*

Tipo de estrategia	**Nivel de pertinencia (%)**				
	NP0	**NP1**	**NP2**	**NP3**	**Total**
Aditiva					
En casos favorables	5 (10,64)				5 (10,64)
En casos desfavorables	4 (8,51)	3 (6,38)			7 (14,89)
En casos favorables y desfavorables	13 (27,65)	2 (4,26)			15 (31,91)
Multiplicativa					
Relación multiplicativa dentro de las cajas			5 (10,64)		5 (10,64)
Compara probabilidades como fracciones	3 (6,38)		1 (2,13)	2 (4,26)	6 (12,77)
Determina y compara probabilidades como porcentajes			5 (10,64)	4 (8,51)	9 (19,15)
Total	**25 (53,19)**	**5 (10,64)**	**11 (23,40)**	**6 (12,77)**	**47 (100)**

Nota: fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

De manera general, se observa que el 63,83 % de los alumnos propusieron una solución incorrecta o incompleta al primer problema y solo el 12,77 % justificó con base en la comparación de las probabilidades expresadas como fracción o como porcentaje, por qué en la caja A es mayor la probabilidad de sacar bola blanca.

El 57,44 % de los alumnos emplearon una estrategia de tipo aditivo. En ellas, comparan de forma aditiva los casos favorables, desfavorables o ambos a la vez, de manera que no establecen correctamente la función semiótica FS1.1.1 o FS1.2.1. Aquellos que siguen una estrategia aditiva en casos favorables escogen la caja B, porque en ella es mayor el número de bolas blancas que en la caja A (ver figura 1).

Los alumnos que usan una estrategia aditiva en casos desfavorables escogen la caja A porque en ella es menor el número de bolas negras respecto de la caja B. A pesar de escoger la caja con mayor probabilidad de éxito, el argumento no es correcto, por lo que se han considerado de nivel de pertinencia NP0, o bien NP1 cuando muestran conocimiento sobre el cálculo de probabilidades, pero no se basan en ellas para decidir la caja con mayor probabilidad de obtener bola blanca (ver figura 2).

Como vemos en la figura 2, A47 reconoce la razón entre los casos favorables y posibles en ambas cajas (también entre casos desfavorables y posibles), sin embargo, no llega a relacionar estas razones con la probabilidad, luego no establece la función FS1.2.1.

Aquellos que aplican una estrategia aditiva en casos favorables y desfavorables consideran que la probabilidad es la misma en ambas cajas puesto que en la caja B se ha añadido el mismo número de bolas de un color u otro respecto de la caja A (ver figura 3).

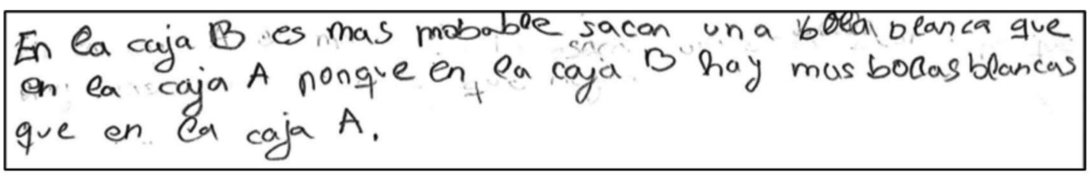

En la caja B es mas probable sacar una bola blanca que en la caja A porque en la caja B hay mas bolas blancas que en la caja A.

Figura 1. *Solución de A9 al problema 1. NP0. Estrategia aditiva en casos favorables*

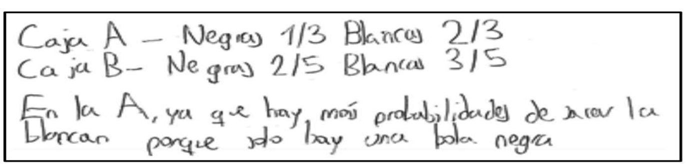

Caja A – Negras 1/3 Blancas 2/3
Caja B – Negras 2/5 Blancas 3/5
En la A, ya que hay más probabilidades de sacar la blanca porque solo hay una bola negra

Figura 2. *Solución de A47 al problema 1. NP1. Razonamiento aditivo en casos desfavorables*

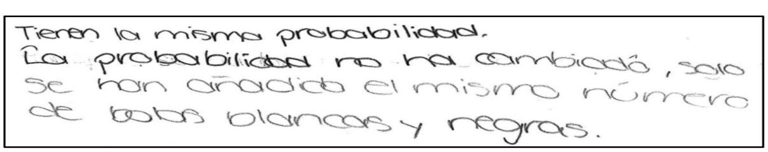

Tienen la misma probabilidad.
La probabilidad no ha cambiado, solo se han añadido el mismo número de bolas blancas y negras.

Figura 3. *Solución de A12 al problema 1. Estrategia aditiva en casos favorables y desfavorables. NP0*

UNICIENCIA Vol. 39, N° 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

Dos de los alumnos que siguieron esta estrategia para concluir que existe la misma posibilidad, habían expresado correctamente la razón entre bolas blancas y totales en ambas cajas (como antes, no llegaron a establecer FS1.2.1). Se observa en estos alumnos un conflicto con la relación de equivalencia de fracciones, que los lleva a considerar que la probabilidad es la misma en ambas. Indican que "las dos tienen la misma probabilidad ya que $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$ son equivalentes" (A37) o escriben formalmente $\frac{2}{3} = \frac{3}{5}$, apreciando que esta equivalencia se debe a que "al sumarle lo mismo a los dos números el resultado sigue siendo el mismo" (A25).

La mayoría de las respuestas de los alumnos en los que se sigue una estrategia multiplicativa son pertinentes (85 % de las resoluciones que siguen esta estrategia, 36,17 % del total de respuestas). Estas respuestas se basan en el establecimiento de una relación multiplicativa dentro de las cajas, es decir, entre los casos favorables y desfavorables (similares a la Solución 1.1), o bien en la comparación de las probabilidades como fracciones (similares a la Solución 1.2) o más frecuentemente como porcentajes.

En el primer tipo de respuesta los alumnos se basan en que en la caja A hay el doble de bolas blancas que, de negras, es decir, establecen la función FS1.1.2, pero en su justificación no mencionan que esta relación es mayor que en la caja B, por lo que es mayor la probabilidad de sacar bola blanca en la caja A. Así, parecen establecer, al menos implícitamente, FS1.1.3 pero no declaran la regla de correspondencia de FS1.1.4.

Los alumnos que expresan las probabilidades como fracciones y las comparan, aplican adecuadamente las funciones semióticas FS1.2.1, FS1.2.2 y FS1.2.3. Sin embargo, la mitad de ellos (categorizados como NP0) no establecen correctamente FS1.2.4. Por ejemplo, A30 (ver figura 4) afirma que en las dos cajas hay la misma probabilidad de sacar bola blanca que negra. Para ello se basa en que la diferencia de la probabilidad de obtener bola blanca o negra en ambas es la misma. Parece referirse a que $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ y $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$.

Todos los alumnos que calcularon las probabilidades y las expresaron como porcentajes para compararlos (19,15 % del total), resolvieron correctamente el problema, sin embargo, en su mayoría no lo justificaron (55,56 % de ellos, 10,64 % del total) y cuando lo hicieron, fundamentaron su argumento en "el porcentaje en A es mayor que el porcentaje en B". Estos alumnos aplican las funciones semióticas FS1.2.1, FS1.2.2 y FS1.2.3, pero en lugar de FS1.2.4 establecen una nueva función semiótica FS1.2.4': Relacionar 66,66% > 60% con que la probabilidad de sacar bola blanca en la caja A, $\frac{2}{3}$, en porcentaje, 66,66% es mayor que la probabilidad de sacar bola blanca en B, $\frac{3}{5}$ en porcentaje 60%.

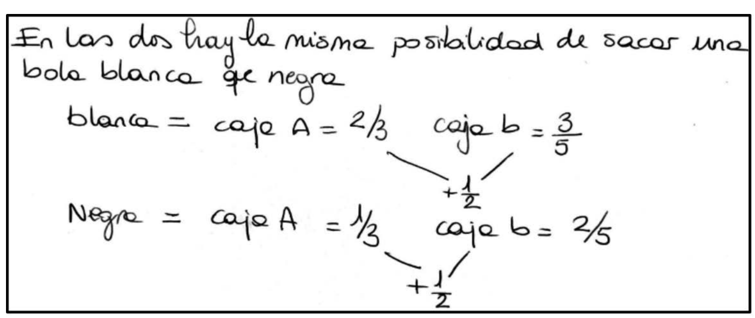

En las dos hay la misma posibilidad de sacar una bola blanca qe negra
blanca = caja A = 2/3 caja b = 3/5
+1/2
Negra = caja A = 1/3 caja b = 2/5
+1/2

Figura 4. *Respuesta de A30 al problema 1. NP0. Comparación incorrecta de probabilidades como fracciones.*

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Estrategias de solución y corrección en la solución al problema 2

El análisis de las respuestas de los 45 alumnos que resolvieron el problema 2 ha permitido identificar los siguientes niveles de pertinencia en sus soluciones:

NP0. Incorrecta.
NP1. Muestra conocimiento del reparto de bolas, pero no lo explicita de forma clara (el reparto queda determinado por medio únicamente de la representación o de las fracciones 5/20, 15/20, sin ninguna justificación).
NP2. Determina explícita y correctamente la composición de la caja B, pero no justifica.
NP3. Obtiene correctamente la composición de la caja B, pero lo justifica parcialmente.
NP4. Determina correctamente la composición de la caja B y lo justifica de manera adecuada.

La tabla 2 relaciona los diferentes tipos de estrategias con su nivel de pertinencia.

Como muestra la tabla 2, en la respuesta de nueve estudiantes no se observa una estrategia explicita. De ellos, seis se limitaron a escribir el resultado numérico sin incluir los procedimientos ni los argumentos que los llevaron a dicha solución. Los otros tres solo plantearon simbólicamente, la relación entre las bolas blancas y negras (tres alumnos), de forma correcta “$1b - 3n$”, en la respuesta de A30, o incorrecta, “$40n - 10b$”, en las de A19 y A44.

Identificar de manera correcta la relación entre bolas blancas y negras, pero no llegar a resolver el problema supone que A30 no pudo establecer la función semiótica FS2.1.1 (FS2.2.2 o FS2.3.1). Por otro lado, A19 y A44, expresan (por duplicación) relaciones equivalentes “$80n - 20b$, $160n - 40b$” sin observar que en ninguna de ellas el total de bolas en B es 20 (errando al aplicar FS2.1.2, FS2.2.3 o FS2.3.3).

Tabla 2. *Tipos de estrategia y nivel de pertinencia en la respuesta al problema 2 (n=47)*

Tipo de estrategia	**Nivel de pertinencia (%)**					
	NP0	**NP1**	**NP2**	**NP3**	**NP4**	**Total**
Sin estrategia explicita						
Proporciona el resultado numérico sin incluir los cálculos ni explicación	1(2,22)		5(11,11)			6 (13,33)
Describe la relación entre las bolas blancas y negras sin determinar su valor numérico	3 (6,67)					3 (6,67)
Aditiva						
Reparto aditivo/icónico	1 (2,22)	1 (2,22)	11 (24,44)	4 (8,89)	3 (6,67)	20 (44,44)
Multiplicativa						
División por la razón			3 (6,67)	1 (2,22)	2 (4,44)	6 (13,33)
Relación multiplicativa entre favorables y desfavorables de una caja	3 (6,67)	1 (2,22)	2 (4,44)	1 (2,22)		7 (15,56)
Parte-todo (fracción o porcentaje de casos favorables/posibles)	1 (2,22)			2 (4,44)		3 (6,67)
Total	**9 (20,00)**	**2 (4,44)**	**21 (46,67)**	**8 (17,78)**	**5 (11,11)**	**45 (100)**

Nota: fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

La estrategia empleada con más frecuencia es la de reparto aditivo con soporte icónico similar a la solución 2.1. En ella, como se observa en la figura 5, los alumnos distribuyen 4 bolas asignándoles el color blanco a una de ellas y el negro a las otras tres (FS2.1.3). Después toman otro grupo de 4 bolas y les asignan de igual forma el color, hasta completar las 20 bolas de la caja B (FS2.1.2, FS2.1.4).

Salvo dos estudiantes, todos los que usaron esta estrategia determinaron correctamente la composición de la caja B, aunque solo siete de ellos se basaron en la probabilidad (al menos parcialmente como A15, figura 5) para justificar su respuesta. Por tanto, aunque antecedente y consecuente de FS2.1.1 sean explícitos, no se declara la regla de correspondencia.

Todos los estudiantes que emplearon la estrategia multiplicativa de división por la razón (Solución 2.2.) resolvieron correctamente el problema. Cuando lo justificaron lo hicieron de manera similar a A7 (ver figura 6).

Observamos que A7 reconoce el todo unitario parcial ("1 bola blanca +3 negras es igual a 4", FS2.2.1), identifica el número de casos posibles (FS2.2.3) y lo descompone en 5 grupos ("20:4=5", FS2.2.4) e implícitamente (no aparece en la justificación) aplica la función FS2.2.5 en la que se reconoce que la razón 1:3 se mantiene para cada uno de los cinco grupos de cuatro bolas.

Los alumnos que resolvieron correctamente el problema estableciendo una relación multiplicativa entre las bolas blancas y negras de la caja B, procedieron de manera similar a A22, cuya respuesta se muestra en la figura 7, junto con las funciones semióticas identificadas. Identifican en la razón "por cada bola blanca hay tres negras" que hay el triple de bolas negras que de blancas (FS2.2.4'). Para que la probabilidad de éxito se mantenga esta relación multiplicativa debe preservarse en la caja B (FS2.2.2.), por lo que buscan dos cantidades, una (la de bolas negras) el triple de la otra (la de blancas)

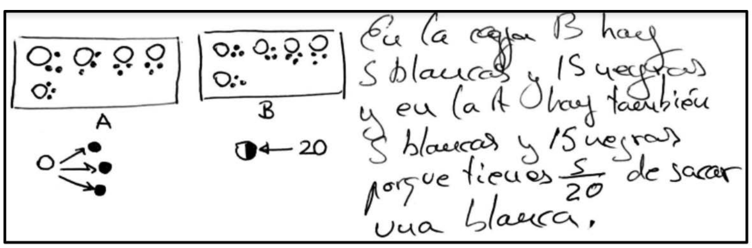
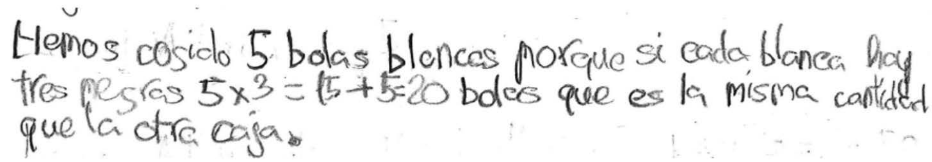


Figura 5. *Solución de A15 al problema 2. NP3. Reparto aditivo*

Hay 5 bolas blancas en la A y la B y hay
15 bolas negras en ambas.
Porque 1 bola blanca+ 3 negras es igual ha 4, luego 20:4=
5. Asi que 5x1=5 y 5x3=15.

Figura 6. *Solución al problema 2 de A7. NP3. Estrategia división por la razón*

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470



FS2.2.2. Vincular la igualdad de probabilidad de sacar bola blanca en ambas cajas con la igualdad de la razón entre bolas blancas y negras (Implícita).
FS2.2.3. Identificar 20 como el número de casos posibles (bolas totales).
FS2.2.4.' Reconocer en la razón 1(blanca):3(negras) la relación multiplicativa "triple de negras que de blancas".
FS2.2.5.' Descomponer el total de bolas, 20, como suma de dos números de manera que uno sea el triple del otro, 5 y 15.
FS2.2.6.' Identificar el menor de estos números como el número de bolas blancas y el mayor (su triple) como el número de bolas negras.

Figura 7. *Solución de A22 al problema 2. NP3. Relación multiplicativa entre casos favorables y desfavorables. Funciones semióticas asociadas*

que sumen 20 (FS2.2.3), como total de bolas en B (FS2.2.5.').

Estos alumnos no determinaron correctamente la composición de la caja B en dos casos, bien porque no respetaron la razón dada (A25 considera que de las 20 bolas de B ocho serán blancas y 12 negras), o porque no reconocieron la cantidad total de bolas en la caja B, lo que supone que FS2.2.3 no se establece de manera adecuada.

Dos de los tres estudiantes que emplean la estrategia parte-todo (Solución 2.3), lo resuelven correctamente: la fracción (1/4) que opera sobre el total de bolas (20) en la caja B, se expresa como el porcentaje (25 %) indicándose de manera explícita que esta es la probabilidad de sacar bola blanca. El otro estudiante, A4, lo resuelve de manera incorrecta, pues asume que la probabilidad de sacar bola blanca es de 1/3, en lugar de 1/4 y establece que 1/3 de 20 es 6, lo que le lleva a considerar que hay 6 bolas blancas y por tanto 14 negras en la caja B. En este caso, puede que el alumno confunda las razones favorables/posibles (parte-todo) y favorables/desfavorables (parte-parte) (lo que lleva a no aplicar de forma correcta FS2.3.1) o bien que no identifique de manera adecuada el todo unitario parcial en la razón 1:3 (no estableciendo de forma pertinente FS2.3.2).

Como hemos podido observar, los alumnos tuvieron más éxito al resolver el segundo problema que el primero. De hecho, el nivel de pertinencia mejoró en 30 de los 45 estudiantes que resolvieron el problema 2, frente al problema 1 y se mantuvo en ocho de ellos. Dado que las estrategias multiplicativas (con rasgos de razonamiento proporcional) derivaron en soluciones en su mayoría correctas y fueron más frecuentes en el primer problema (42,55 %) que en el segundo (35,66 %), esto se explica porque 20 estudiantes (un 44,44 % del total) usaron para resolver el problema 2 una estrategia de reparto aditivo o icónico que fue pertinente en 18 de estos (40 % del total).

Finalmente, es significativo que 11 de los alumnos (el 24,45 %) que resolvieron el problema 2 indicaron explícitamente que en ambas cajas debía haber el mismo número de bolas de cada color. De estos, cuatro lo consideraron al justificar que para que la probabilidad sea la misma es necesario que

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

en ambas cajas haya el mismo número de bolas. Por ejemplo, esto se observa en la respuesta de A15 (ver figura 5) o cuando A20 indica "como tienen las mismas probabilidades, tienen las mismas bolas". Además, otros ocho estudiantes, aunque no indican de manera explícita que ambas cajas deberían tener el mismo número de bolas, sí lo hacen al representar icónicamente la caja A con 5 bolas blancas y 15 negras.

Este hecho pone de manifiesto una visión de la probabilidad como cociente dado por los casos favorables y posibles, más que como razón que, si bien no tiene por qué dar un resultado erróneo en la obtención de la composición de la caja B, limita una capacidad esencial del razonamiento proporcional: analizar cambios en términos relativos al relacionar el número de partes de un todo y el tamaño de cada parte (Lamon, 2007).

Discusión

En este trabajo se han analizado las soluciones de estudiantes de sexto curso de primaria a dos tareas de probabilidad que requieren razonamiento proporcional: la primera de comparación de probabilidades en urnas y la segunda, de obtención de la composición de una urna (determinación del espacio muestral) para mantener la probabilidad de éxito de otra con razón de casos favorables a desfavorables conocida. Estas tareas implican dos de las habilidades esenciales del razonamiento probabilístico según Supply *et al*. (2020): "comparar probabilidades" y "crear probabilidades iguales" y que son factibles de ser investigadas desde las primeras etapas educativas.

El análisis *a priori*, por medio de las funciones semióticas, nos ha permitido identificar las relaciones que se establecen entre los objetos implicados en las prácticas que dan solución a los problemas, facilitando la interpretación de los errores de los estudiantes (Godino *et al*., 2021). La existencia de funciones semióticas comunes a distintas soluciones permite identificar aspectos determinantes del conocimiento involucrado en la resolución del problema (por ejemplo, la función FS2.3.2 es esencialmente FS2.2.1 y FS2.3.6 coincide con FS2.2.7.)

El análisis de las estrategias de resolución de los estudiantes, es decir, de sus sistemas de prácticas prototípicas para resolver la tarea, nos ha permitido identificar las funciones semióticas que habían aplicado correctamente y las que no, por tanto, mostrando significados personales y conflictos cognitivos en de los alumnos. Hemos podido observar funciones semióticas recurrentes, pero también soluciones de los alumnos de las que emergían nuevas funciones semióticas (por ejemplo, en la figura 7).

Por un lado, en el primer problema, predominaron estrategias incorrectas de tipo aditivo, en las que no se llega a relacionar la probabilidad con la razón de casos favorables a desfavorables (FS1.1.1) o con la razón de casos favorables a posibles (FS1.2.1). Los alumnos ignoran un tipo de bola (blanca, favorable, o negra, desfavorable) y razonan de forma aditiva sobre el otro tipo, o bien consideran ambos tipos de bolas, pero se basan en cuántas bolas más de cada tipo hay en la caja B respecto de la caja A.

La manifestación de estos conflictos concuerda con los observados por Castillo y Fernández (2022) ("ignorar datos", "respuesta aditiva" en su trabajo) en la resolución de problemas de comparación de razones en contextos de ofertas y mezclas por parte de estudiantes de Educación Secundaria.

Por otro lado, los alumnos mostraron buen desempeño con la segunda tarea propuesta, ya que tres cuartas partes

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

determinaron adecuadamente, la composición de la caja. Este hecho concuerda con los resultados obtenidos por Hernández-Solís *et al*. (2021b, 2021c) en tareas de construcción del espacio muestral en el contexto de urnas por estudiantes de la misma edad. Mientras que en Hernández-Solís *et al*. (2021b, 2024) los estudiantes logran construir espacios muestrales compatibles con un suceso equiprobable a su complementario, en nuestro trabajo, el espacio muestral creado debe mantener la misma probabilidad de éxito que otro espacio muestral, lo que involucra necesariamente razonar proporcionalmente sobre su composición (FS2.1.1, FS2.2.2).

Además, nuestros resultados mejoran sustancialmente los obtenidos en repartos proporcionales en contexto aritmético por Sánchez Ordóñez (2014) (donde los repartos se hacen de manera equitativa y no proporcional) o Yeong *et al*. (2020) (en el que más del 80 % de los alumnos resuelven de manera incorrecta el problema). Esencialmente, las funciones semióticas vinculadas a las prácticas que dieron lugar a conflicto en las respuestas de los alumnos al problema 2 fueron FS2.2.1, cuando no aplicaron la razón dada, o FS2.2.3 cuando no interpretaron 20 como la cantidad total de bolas en la caja B.

Esta última se relaciona con la dificultad principal observada en el trabajo de Yeong *et al*. (2020) en la que la suma de las partes a repartir no coincidía con el total proporcionado en el problema. Sin embargo, Yeong *et al*. (2020) señalan como segunda dificultad más frecuente el uso de razonamiento aditivo, algo que no hemos encontrado en la resolución del segundo problema planteado en nuestra investigación.

Que las estrategias con rasgos de razonamiento proporcional fueran más frecuentes en el primer problema que en el segundo, muestra que establecer una relación multiplicativa en la solución a un problema no supone que también se establezca en el otro. En términos de funciones semióticas esenciales: relacionar la probabilidad con la razón de casos favorables a desfavorables (FS1.1.1) o con la razón de casos favorables a posibles (FS1.2.1), no garantiza vincular la igualdad de probabilidad de éxito con la igualdad de las razones entre casos favorables y desfavorables de ambas (FS2.1.1, FS2.2.2). Además, la falta de justificación o de justificación parcial se interpreta como la ausencia de declaración explícita de la regla de correspondencia en determinadas funciones semióticas (FS1.1.1, FS1.2.1, FS1.1.4 en el primer problema; FS2.2.1 o FS2.2.2 en el segundo).

El mayor nivel de pertinencia logrado por los estudiantes en el segundo problema es que el primero contrasta con los resultados de investigaciones como las de Supply *et al*. (2020, 2023) en las que observan que los alumnos tienen más dificultades con problemas de valor faltante (donde aparece un pensamiento aditivo incorrecto) que con problemas de comparación de razones en el contexto probabilístico.

Además, los resultados, en lo que respeta al segundo problema son especialmente novedosos, dada la escasez de trabajos de reparto proporcional en el contexto probabilístico y lo original de la tarea con relación a otras de determinación del espacio muestral en contexto de urnas (Hernández-Solís *et al*., 2021a, 2021b, 2024).

Revelan dificultades que, hasta el conocimiento de los autores, no han sido identificadas en investigaciones previas sobre la resolución de problemas de reparto proporcional en el contexto probabilístico o aritmético: 1) asumir que las dos cantidades de totales han de ser la misma (en nuestro

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

contexto, asignar una cantidad casos posibles a la caja cuya razón de casos favorables a desfavorables es conocida), 2) no identificar de manera adecuada el todo unitario parcial conocida la razón de reparto (en nuestro contexto, casos favorables a desfavorables).

Como limitaciones en nuestra investigación, consideramos que habría sido conveniente proponer a los alumnos tareas de comparación de razones, valor faltante y reparto en un contexto aritmético, para valorar la relación con su nivel de desempeño en este caso.

Aunque los tutores no indicaron en la entrevista carencias al respecto en sus alumnos, como si lo hicieron sobre las nociones básicas de probabilidad, indagar sobre estas competencias nos hubiera permitido, por un lado, comprender si los errores en la primera tarea se mantienen en un contexto determinista y por otro, si tienen el mismo desempeño en tareas de reparto proporcional, donde no se ha documentado la creencia de que ambos espacios deban tener el mismo todo o las mismas partes para el reparto. También sería conveniente extender nuestra investigación a significados como el subjetivo o frecuencial, así como a estudiantes de secundaria, en los que la formación sobre razonamiento proporcional y probabilístico adquiere niveles más sofisticados.

Aunque durante la Educación Primaria se aborda el razonamiento proporcional en tareas de reparto equitativo y mezclas, son limitadas sus aplicaciones en situaciones probabilísticas (Supply *et al*., 2023). Puesto que las estrategias que emplean los estudiantes para resolver un problema se ven influenciadas por el contexto (Supply *et al*., 2023) y la probabilidad promueve una forma de razonar distinta a otras ramas de las matemáticas (Borovnick y Kapadia, 2014), es fundamental seguir explorando situaciones que permitan a los estudiantes desarrollar su razonamiento proporcional en el ámbito de la probabilidad.

Agradecimiento

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE, con apoyo de los Grupo de Investigación FQM-126 y HUM-886 (Junta de Andalucía)

Consentimiento informado

Se mantuvo una reunión inicial con la directora del centro, quien autorizó la realización de la investigación y valoró positivamente la experiencia en el contexto del consejo escolar. La participación de los estudiantes fue gestionada de acuerdo con las normativas del centro y se aseguró que el proceso respetara la confidencialidad de los datos y el carácter voluntario de la intervención, en todo momento.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

Los roles de los autores según CRediT fue:

M. B.: Conceptualización, metodología, análisis formal, borrador original, redacción, revisión y edición.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

N. T. -E.: Metodología, análisis, revisión y edición.

M. M. L. -M.: Metodología, supervisión, revisión y edición.

El porcentaje total de contribución de este artículo fue el siguiente: M. B. 40 %, N. T. -E. 30 % y M. M. L. -M: 30 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [**M. M. L. -M.**], previa solicitud razonable.

Preprint

Una versión *preprint* de este artículo fue depositada en: https://doi.org/10.5281/zenodo.13737771

Referencias

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA) (2014). *Foundation to year 10 curriculum: Statistics and Probability* (ACMSPO24).

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). The Meaning and Understanding of Mathematics. En K. François y J. Van Bendegem (Eds.), *Philosophical Dimensions in Mathematics Education. Mathematics Education Library* (pp. 107-128). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71575-9_6

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática*, *15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3

Batanero, C., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2023). Analysing Costa Rican and Spanish students´ comparisons of probabilities and ratios. *SERJ, 22(*3), 1-23. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659

Begolli, K. N., Dai, T., McGinn, K. M. y Booth, J. L. (2021). Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science, 49*, 441–473. https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9

Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A Historical and Philosophical Perspective on Probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Advances in Mathematics Education* (pp. 7-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_2

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review* (full report). The Nuffield Foundation.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Castillo, S. y Fernández, C. (2022). Secondary School Students' Performances on Ratio Comparison Problems. *Acta Scientiae*, *24*(6), 60-88. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6834

Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2015). *Common Core State Standards for Mathematics*. http://www.corestandards.org/Math/

Fernández, C., Ivars, P., Rojas, F. y Castillo, S. (2024). Desde estrategias aditivas hasta estrategias proporcionales: características identificadas con estudiantes de Educación Básica Media y Superior de Ecuador, *Educación Matemática, 36*(2), 68-91. https://doi.org/10.24844/EM3602.03

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw-Hill - Aula Magna. Versión digital de acceso abierto: https://hdl.handle.net/10481/93596

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(10), 2609–2636. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042.

Gopnik, A. (2012). Scientific thinking in young children: Theoretical advances, empirical research, and policy implications. *Science*, *337*(6102), 1623-1627. https://doi.org/10.1126/science.1223416

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (2024). Relación entre la construcción de espacios muestrales y el razonamiento proporcional de estudiantes costarricenses. *Revista de Educación Estadística, 3*, 1-28. https://doi.org/10.29035/redes.3.1.1

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Comparing probabilities in urns: A study with primary school students. (2021). *Uniciencia*, *35*(2), 1-18. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021b). Construction of sample spaces associated with different types of events: an exploratory study with Primary Education students. *Educación Matemática*, *33*(1), 181-207. https://doi.org/10.24844/em3301.07

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021c). Resolución de tareas probabilísticas en contexto geométrico por estudiantes de Educación Primaria. *Educação & Realidade*, *46*(3). https://doi.org/10.1590/2175-6236105401

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Research on children's reasoning in comparing probabilities. *BEIO, Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, *39*(1), 1-24

Horvath, J. K. y Lehrer, R. (1998). A Model-Based Perspective on the Development of Children's Understanding of Chance and Uncertainty. En S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on Statistics: Learning, Teaching, and Assessment in Grades K-12* (pp. 121-148). Routledge.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). NCTM.

Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 95–119). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_5

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa: una introducción conceptual*. (5. ª ed.) Pearson Educación.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*(I), 24386-24504.

Pratt, D. y Kazak, S. (2018). Research on Uncertainty. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education. Springer International Handbooks of Education* (pp. 193-227). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Sánchez Ordoñez, E. A. (2014). Hacer un reparto proporcional o un reparto equitativo: ¿cómo influye el contexto para tomar la decisión? *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 44–60.

Supply, A. S., Vanluydt, E., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2023). Out of proportion or out of context? Comparing 8- to 9-year-olds' proportional reasoning abilities across fair-sharing, mixtures, and probability contexts. *Educational Studies in Mathematics, 113*, 371–388. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10212-5

Supply, A.S., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2020). Can we count on early numerical abilities for early probabilistic reasoning abilities? *Mathematical Thinking and Learning, 24*(1), 19-37. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1805551

Truran, J. (1994). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 337–344). PME

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: analyses from a psychological perspective. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Advances in Mathematics Education* (pp. 123-126). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_7

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.28
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The Illusion of Linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 113–138. https://doi.org/10.1023/A:1025516816886

Yeong, J. I., Martínez, R. y Dougherty, B. (2020). Misconceptions on part-part-whole proportional relationships using proportional division problems. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(2), 67-81. https://doi.org/10.1080/19477503.2018.1548222

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-24. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr