*Uniciencia* Vol. 39(1), pp. 1-21, January-December, 2025
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr
DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


# Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales en dos variables

*Cognitive Construction of the Solution Set of a System of Linear Inequalities in Two Variables*

*Construção cognitiva do conjunto solução de um sistema de inequações lineares em duas variáveis*

**Adrián Muñoz-Orozco[1]*, Gustavo Martínez-Sierra[2]**

Received: Sep/11/2024 • Accepted: Apr/8/2025 • Published: Nov/30/2025

**Resumen**

**[Objetivo]** El objetivo de esta investigación es identificar las estructuras y mecanismos mentales empleados por un grupo de estudiantes de Administración de Empresas para comprender el conjunto-solución de un sistema de inecuaciones lineales en dos variables (CSSIL), a medida que establecen conexiones cartesianas. Los fundamentos teóricos utilizados son la teoría APOE y el concepto de "conexión cartesiana". **[Metodología]** Este estudio es de tipo cualitativo. Para el diseño del instrumento, se elaboró una descomposición genética preliminar (DGP) y a partir de ella se diseñaron tres tareas. Para la recolección de datos, se aplicaron estas tareas a un grupo de 19 estudiantes (entre 19 y 22 años). Posteriormente, se seleccionaron los tres participantes que proporcionaron las respuestas más detalladas para realizar una entrevista semiestructurada. **[Resultados]** Los resultados mostraron que las personas participantes construyeron el proceso del CSSIL coordinando el proceso de conjunto solución de la inecuación lineal en dos variables (CSIL) con el proceso de intersección de conjuntos. Se observa que asociaban el CSSIL con un polígono y no consideraban que fuera un conjunto vacío, convexo o acotado. **[Conclusiones]** Se concluye que aquellas personas participantes que construyeron la estructura de acción o un proceso de CSIL mostraron el mismo tipo de estructura en relación con el CSSIL. Se sugieren nuevas investigaciones que profundicen los mecanismos y estructuras mentales descritas en este estudio, así como en el diseño de propuestas de enseñanza que contribuyan a mejorar el aprendizaje del CSSIL.

**Palabras clave**: inecuación lineal; teoría APOE; tareas; conexión cartesiana; comprensión; conjunto solución.

* Corresponding author
Adrián Muñoz-Orozco, 16348253@uagro.mx.co, https://orcid.org/0000-0001-5582-470X
Gustavo Martínez-Sierra, gmartinezsierra@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2462-7401
1 Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo de los Bravo, México.
2 Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo de los Bravo, México.

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


## Abstract

**[Objective]** The objective of this research is to identify the mental structures and mechanisms used by a group of Business Administration students to understand the solution set of a system of linear inequalities in two variables (SSSLI), as they establish Cartesian Connections. The theoretical foundations used are the APOS theory articulated with the concept of Cartesian Connection. **[Methodology]** This study is qualitative. For the design of the instrument, a preliminary genetic decomposition (PGD) was developed, and based on the PGD three tasks were designed. For data collection, these tasks were applied to a group of 19 students (between 18 and 22 years old). Later, the three participants who provided the most detailed answers were selected to conduct a semi-structured interview. **[Results]** The results showed that participants constructed the SSSLI Process by coordinating the solution set Process of the linear inequality in two variables (SSLI) with the set intersection Process. It was observed that participants associated the SSSLI with a polygon and did not consider it to be an empty, convex or bounded set. **[Conclusions]** It was concluded that those participants who constructed the action structure or a SSLI process showed the same type of structure in relation to SSSLI. New research is suggested that delves deeper into the mechanisms and mental structures described in this study, as well as into the design of teaching proposals that contribute to improving SSSLI learning.

**Keywords:** Linear inequality; APOE theory; tasks; Cartesian Connection; understand; solution set.

## Resumo

**[Objetivo]** O objetivo desta pesquisa é identificar as estruturas e os mecanismos mentais utilizados por um grupo de estudantes de Administração de Empresas para compreender o conjunto solução de um sistema de inequações lineares em duas variáveis (CSSIL), à medida que estabelecem conexões cartesianas. Os fundamentos teóricos utilizados são a teoria APOE e o conceito de "conexão cartesiana". **[Metodologia]** Este estudo é qualitativo. Para o desenho do instrumento, foi elaborada uma decomposição genética preliminar (DGP) e a partir dela foram elaboradas três tarefas. Para a coleta de dados, essas tarefas foram aplicadas a um grupo de 19 alunos (entre 19 e 22 anos). Posteriormente, os três participantes que forneceram as respostas mais detalhadas foram selecionados para uma entrevista semiestruturada. **[Resultados]** Os resultados mostraram que os participantes construíram o processo CSSIL coordenando o processo de conjunto solução para inequação linear em duas variáveis (CSIL) com o processo de interseção de conjuntos. Observa-se que eles associaram o CSSIL a um polígono e não o consideraram um conjunto vazio, convexo ou limitado. **[Conclusões]** Conclui-se que os participantes que construíram a estrutura de ação ou um processo CSIL apresentaram o mesmo tipo de estrutura em relação ao CSSIL. Recomenda-se realizar novas pesquisas que explorarem os mecanismos e estruturas mentais descritos neste estudo, bem como o design de abordagens de ensino que contribuam para melhorar a aprendizagem do CSSIL.

**Palavras-chave**: inequação linear; teoria APOE; tarefas; conexão cartesiana; compreensão; conjunto solução.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

## Introducción

El uso del marco teórico APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas), que propone Dubinsky (1991) para describir cómo un estudiante comprende un concepto matemático a través de un modelo hipotético llamado "descomposición genética", ha experimentado un crecimiento significativo en los últimos 30 años, convirtiéndose en un referente teórico para la investigación en diversas áreas de Educación Matemática. Por ejemplo, se ha aplicado en estudios sobre Álgebra Lineal (Salgado y Trigueros, 2015), Estadística y Probabilidad (Vásquez y Parraguez, 2015), Cálculo (Borji *et al*., 2024; Brijlall y Ndlazi, 2019; Dubinsky *et al*., 2005), Inducción Matemática (García-Martínez y Parraguez, 2017) y Cálculo Multivariado (Borji y Martínez-Planell, 2020; Martinez-Planell, 2021; Trigueros y Martínez-Planell, 2010).

En Educación Matemática, se ha articulado la teoría APOE con otros marcos teóricos con el propósito de enriquecer la discusión teórica e interpretar los datos obtenidos desde diversas perspectivas (Salgado y Trigueros, 2015; Trigueros *et al*., 2024; Trigueros y Oktaç, 2019). Por ejemplo, Font *et al*. (2016) y Borji *et al*. (2018) emplearon la teoría APOE en conjunto con el enfoque ontosemiótico para analizar el concepto de derivada. Martínez-Planell y Trigueros (2019) relacionaron la APOE con la teoría de registros semióticos para examinar cómo las personas estudiantes comprenden la representación gráfica de funciones en dos variables. Por su parte, Chamberlain y Vidakovic (2021) combinaron la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) con la APOE para analizar el concepto de prueba matemática. Por último, Moon (2020) vinculó la APOE con el concepto de conexión cartesiana para explicar cómo el alumnado representan gráficamente inecuaciones en dos variables.

En esta investigación, el interés radica en expandir la discusión sobre la integración de la teoría APOE con la conexión cartesiana, una articulación inicialmente propuesta por Moon (2020). En particular, se extiende esta perspectiva para incorporar el concepto de CSSIL. Asimismo, este estudio aporta al campo de la Educación Matemática al abordar el concepto de inecuaciones desde una mirada más amplia. Nos enfocamos específicamente en las inecuaciones con dos variables, poniendo especial énfasis en los sistemas de inecuaciones, un tema que ha recibido escasa atención en la literatura (Loska *et al*., 2024; Moon, 2020), pues la mayoría de las investigaciones se han centrado en las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de inecuaciones en una variable.

Además, este estudio tiene como objetivo identificar las estructuras y mecanismos mentales que manifiesta un grupo de estudiantes de Administración de Empresas, así como las conexiones cartesianas establecidas entre las representaciones gráfica y algebraica. Este tipo de investigaciones resulta valioso para comprender los aspectos cognitivos que el estudiantado emplea para establecer conexiones entre las diferentes representaciones de un concepto, lo cual podría ser útil para diseñar actividades o propuestas de enseñanza y aprendizaje que contribuyan al aprendizaje de las inecuaciones en dos variables y el CSSIL. En este sentido, este estudio busca abordar la siguiente pregunta de investigación: ¿qué estructuras y mecanismos mentales construyen un grupo de estudiantes de Administración de Empresas conforme crean conexiones cartesianas entre las representaciones gráfica y algebraica del CSSIL?

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

## Revisión de la literatura

El concepto de inecuación es fundamental para abordar problemas de optimización mediante programación lineal en una variedad de campos, tales como Ingeniería Industrial, Administración de Empresas, Economía, entre otras (Edwards y Chelst, 1999; Moon, 2020; Schreiber y Tsamir, 2012). Además, constituye un tema relevante en la construcción del conocimiento matemático en disciplinas como Álgebra Lineal, Álgebra Abstracta, Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, Geometría Analítica, por mencionar algunas (Çekmez, 2021; Loska *et al*., 2024; Ndlovu y Ndlovu, 2020).

En el campo de la Educación Matemática, la investigación sobre las inecuaciones se categoriza en los siguientes enfoques: (1) dificultades y errores de aprendizaje en inecuaciones de una variable (Biney *et al*., 2023; Blanco y Garrote, 2007; Çiltaş y Tatar, 2011). (2) Propuestas de enseñanza y aprendizaje mediadas por la tecnología para mejorar la comprensión a través de la visualización de las inecuaciones en una variable (Abramovich y Connell, 2015; Kabaca, 2013; Tamba *et al*., 2018). (3) Comprensión de la representación gráfica de inecuaciones de dos variables (Çekmez, 2021; Moon, 2020; Switzer, 2014). Además, (4) sistemas de inecuaciones en dos variables (Abramovich y Connell, 2015; Loska *et al*., 2024).

En la literatura sobre inecuaciones, se ha observado que los estudios que fomentan las relaciones entre los registros gráfico y algebraico resultan beneficiosas para comprender el conjunto de solución de inecuaciones en una variable. Además, la mayoría de las investigaciones se centra en inecuaciones de una variable, y dejan de lado las inecuaciones en dos o más variables o los sistemas de inecuaciones (Kabaca, 2013; Loska *et al*., 2024; Moon, 2020; Verikios y Farmaki, 2010). Por ello, la literatura sugiere la necesidad de nuevas investigaciones que amplíen el estudio de las inecuaciones de una variable a las inecuaciones en dos variables o los sistemas de inecuaciones, enfocándose en la comprensión de la representación gráfica del conjunto solución de una inecuación (Abramovich y Connell, 2015; Çekmez, 2021; Loska *et al*., 2024).

Los estudios sobre sistemas de inecuaciones, en su mayoría, se han limitado a realizar propuestas de aprendizaje que aún no se han validado empíricamente. Por ejemplo, Abramovich y Connell (2015) diseñaron una secuencia de tareas para enseñar la representación gráfica del CSSIL y las inecuaciones no lineales, con base en el diseño de las tareas en el uso de tecnología y en la transición del registro algebraico al gráfico como recurso didáctico para promover el aprendizaje. Edwards y Chelst (1999) sugirieron enseñar el CSSIL mediante contextos reales, resolviendo problemas de programación lineal, para que el alumnado pueda crear conexiones entre el concepto y situaciones del mundo real.

En contraste, Loska *et al*. (2024) sí realizaron un estudio empírico sobre el CSSIL y encontraron que estudiantes de nivel de secundaria lograron identificar las características fundamentales de un sistema de inecuaciones en dos variables; sin embargo, las personas autoras consideran necesario seguir profundizando en este tema para favorecer una comprensión más sólida del estudiantado.

En investigaciones sobre las funciones en dos variables y la programación lineal, se ha encontrado que la representación gráfica del CSSIL es fundamental para comprender los elementos de una función y la optimización de funciones lineales. Por ejemplo, Martínez-Planell y Trigueros (2012) señalaron

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

que la comprensión de una función en dos variables depende de que el grupo de estudiantes haya encapsulado su dominio como un "objeto", el cual, en algunas ocasiones, corresponde al CSSIL. En Martínez-Planell y Trigueros (2019), se encontró que las personas estudiantes suelen tener dificultades para representar el dominio de una función en dos variables cuando este corresponde al CSSIL. En Edwards y Chelst (1999) se enfatizó que la comprensión del CSSIL juega un papel fundamental en la solución de problemas reales de programación lineal.

En la literatura, solo encontramos la investigación de Moon (2020), quien articuló la teoría APOE con la conexión cartesiana para describir las estructuras y los mecanismos mentales que podrían necesitar las personas estudiantes para representar gráficamente el conjunto de solución de una inecuación en dos variables. Según Moon (2020), cada estudiante tiene una estructura de "acción" sobre una inecuación cuando encuentra algebraicamente algunos puntos que satisfacen la inecuación. En la estructura de "proceso", la persona estudiante representa de forma gráfica la solución de una inecuación al coordinar las estructuras de proceso de parámetro y variable; mientras que, en la estructura "objeto", cada estudiante comprende la gráfica de una inecuación como la totalidad de los puntos que satisfacen la expresión algebraica de la inecuación. Los resultados de Moon (2020) mostraron que los y las estudiantes presentan dificultades para crear conexiones entre la representación gráfica y algebraica de una inecuación y, en la mayoría de los casos, conciben la representación gráfica en las estructuras de "acción" y "proceso".

En resumen, la revisión de la literatura indica que el estudio de la comprensión del CSSIL contribuye a ampliar la investigación sobre las inecuaciones, la cual ha experimentado un crecimiento significativo en los últimos años. La investigación sobre la comprensión del CSSIL también beneficia la investigación en cálculo y programación lineal, dada la relación existente entre el CSSIL y la construcción del conocimiento matemático en estas áreas.

## Marco teórico

### Teoría APOE

La APOE es un marco teórico cognitivo que describe cómo una persona estudiante podría comprender un concepto matemático a partir de sus concepciones previas sobre otros conceptos matemáticos (Arnon *et al*., 2014). Este marco está compuesto por las estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas; así como por los mecanismos mentales: interiorización, coordinación, reversión, desencapsulación, encapsulación y tematización. Las primeras permiten describir la concepción que cada estudiante podría tener sobre un concepto matemático, mientras que los mecanismos mentales describen cómo se mueve entre las diferentes estructuras (Trigueros y Oktaç, 2019).

Un concepto matemático se concibe, en un inicio, como una acción cuando la persona estudiante realiza una transformación sobre uno o más objetos previamente comprendidos por él. Para llevar a cabo esta transformación, el estudiante necesita apoyos externos, como el uso de notas de clase, ejemplos previos, ejercicios prototipo o indicaciones de la persona docente. Si cada estudiante repite una "acción" y comienza a reflexionar sobre ella, la interioriza en la estructura de "proceso". En esta, cada estudiante está capacitado para omitir pasos o imaginar el siguiente paso al resolver un problema, lo cual le permite desarrollar un

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

control interno sobre las "acciones" (Arnon *et al*., 2014; Martínez-Planell y Trigueros, 2019). Un "proceso" puede revertirse para construir un "proceso inverso" o coordinarse con otros "procesos" para dar origen a nuevos "procesos".

Si una persona estudiante puede llevar a cabo o concebir nuevas transformaciones (acciones o procesos) sobre el "proceso", entonces ha encapsulado ese "proceso" en un "objeto". El mecanismo de encapsulación permite comprender el "proceso" como un todo, al pasar de imágenes dinámicas a estáticas del "proceso". En esta estructura, una persona estudiante puede desepcansular el "objeto" en el "proceso" del que se originó (Betancur *et al*., 2022). En la estructura de "esquema", cada estudiante, a través del mecanismo de tematización, puede articular de manera coherente los mecanismos, las estructuras mentales y otros esquemas previamente construidos para resolver problemas matemáticos u otros problemas en diferentes áreas (Salgado y Trigueros, 2015).

La descripción de los mecanismos y estructuras mentales necesarias para que un estudiante comprenda un concepto matemático se conoce como "descomposición genética" (García-Martínez y Parraguez, 2017). De acuerdo con Arnon *et al*. (2014), para diseñar una descomposición genética, inicialmente se elabora una descomposición genética preliminar (DGP), basándose en la experiencia de la persona investigador como docente y estudiante, análisis histórico, análisis de libros de texto o publicaciones anteriores sobre el concepto. La DGP se pone a prueba experimentalmente con estudiantes, quienes mostrarán las estructuras previstas y otras inesperadas, lo cual permite refinar la hipótesis inicial para describir mejor lo que cada estudiante realmente piensa (Martínez-Planell y Trigueros, 2019).

## Conexión cartesiana

La conexión cartesiana tiene su origen en la definición de Moschkovich *et al.* (1993) respecto a la representación gráfica de la ecuación lineal en dos variables, la cual establece que "un punto está en la gráfica de la línea L sí y sólo sí sus coordenadas satisfacen la ecuación de L" (p. 73). Esta definición fue empleada para indagar cómo las personas estudiantes de Licenciatura en Matemáticas comprenden que un punto ubicado sobre una línea recta es una solución de la ecuación algebraica y, a su vez, cómo reconocen la línea recta como la representación gráfica del conjunto solución de la ecuación lineal en dos variables (CSEL).

Moon et al. (2013) amplió el concepto de conexión cartesiana para aplicarlo a cualquier tipo de ecuación, como se describe: "un punto está en el gráfico de la relación matemática $R(x, y) = 0$ si y sólo sí sus coordenadas satisfacen $R(x, y) = 0$" (p. 204). En el estudio de Moon *et al.* (2013) se utilizó la conexión cartesiana como un marco cognitivo para analizar la comprensión de estudiantes de matemáticas sobre la representación gráfica de figuras cónicas. Los resultados de esta investigación revelaron que el grupo de estudiantes enfrentó dificultades para crear conexiones entre la representación algebraica y gráfica de las figuras cónicas, debido a que no reconocen que un punto sobre la curva satisface la relación algebraica.

En Moon (2020), la definición de la conexión cartesiana se reestructura nuevamente para incluir las inecuaciones en dos variables de la siguiente manera: "un punto está en la gráfica de una relación matemática si y sólo sí sus coordenadas satisfacen la relación" (p. 352). En esta investigación, consideramos la definición de la conexión cartesiana para los sistemas de inecuaciones como: *un punto (si*

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


*existe) pertenece a la representación gráfica del conjunto solución de un sistema de inecuaciones si y solo sí sus coordenadas satisfacen simultáneamente todas las inecuaciones presentes en el sistema.*

### Teoría APOE y conexión cartesiana

La teoría APOE y la conexión cartesiana son enfoques teóricos complementarios que permiten describir cómo una persona estudiante llega a comprender un concepto matemático; esto implica que no son mutuamente excluyentes (Moon, 2020). De acuerdo con la teoría APOE, la comprensión de un concepto matemático ocurre conforme cada estudiante desarrolla estructuras mentales específicas: acción, proceso, objeto y esquema (Arnon *et al*., 2014). Por su parte, la perspectiva de la conexión cartesiana plantea que la comprensión se evidencia cuando la persona estudiante logra establecer vínculos entre dos o más representaciones de un mismo concepto. No obstante, esta teoría advierte que el uso de múltiples registros de representación no garantiza por sí solo la comprensión conceptual (Moon *et al*., 2013).

Consideramos que la conexión cartesiana complementa a la teoría APOE, pues ofrece una perspectiva más concreta para describir las estructuras y mecanismos mentales que cada estudiante utiliza al comprender un concepto matemático a través de sus distintas representaciones. Por ejemplo, en el caso de la relación $R(x, y) = c$ una "acción" es que la persona estudiante encuentre algunos puntos que satisfacen la ecuación sin crear aún conexiones entre otro registro de representación y un "proceso" se da cuando la persona estudiante establece conexiones entre las representaciones gráfica y algébrica y puede comprender que la gráfica representa un conjunto infinito de soluciones de la relación matemática. Esto puede encapsularse en la estructura "objeto", cuando cada estudiante reconoce la representación gráfica como una entidad matemática manipulable y, finalmente, matematizarse en un "esquema" que le permite relacionar estas representaciones con otras representaciones como verbal o solucionar problemas de la vida real. En este sentido, el uso de las teorías, al ser aplicadas de manera conjunta, permiten un análisis más profundo y descriptivo del pensamiento matemático del alumnado

## Metodología

La metodología empleada en esta investigación es de tipo cualitativo-descriptivo, adecuada para el tipo de pregunta de investigación que se pretende responder. Se utilizó el ciclo modificado de APOE, el cual, según Arnon *et al*. (2014), consta de tres elementos: (1) análisis teórico, (2) diseño e implementación de instrumentos y (3) la recolección y análisis de datos (Figura 1). Además, esta metodología se ha utilizado en investigaciones con características similares, por lo que se considera pertinente su uso en este estudio.

### Análisis teórico

En APOE, la elaboración de una "descomposición genética" requiere diseñar una

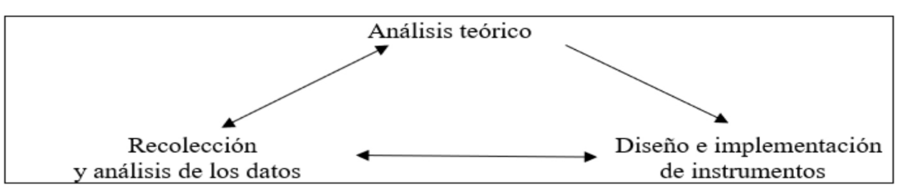


Figura 1. *Ciclo modificado de APOE.*
Extraído de (Arnon *et al*., 2014)

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

DGP que se pondrá a prueba con estudiantes mediante actividades diseñadas para observar empíricamente los mecanismos y estructuras planteadas en la DGP (Martínez-Planell y Trigueros, 2019). En el análisis teórico, se diseña una propuesta de DGP para el CSSIL, basada en nuestro conocimiento de los elementos teóricos de APOE y la conexión cartesiana, nuestra experiencia como educadores y estudiantes, nuestro conocimiento matemático y las investigaciones previas en el tema.

En la DGP, formulamos la hipótesis de que para que cada estudiante pueda construir la estructura objeto del CSSIL, primero debe crear la estructura proceso del conjunto-solución de la ecuación lineal (CSEL) y las estructura objeto de CSIL. Por lo tanto, la propuesta de DGP para el conjunto CSSIL es la siguiente:

*Estructuras previas.* La estructura "proceso" de los conceptos de: variable, coordenada, ecuación en una variable, inecuación en una variable, semiplano y plano cartesiano. La estructura "objeto" de conjunto y R y $R^2$. El grupo de estudiantes que posea estas estructuras debe ser capaz de comprender qué es una coordenada y representarla en el plano cartesiano, resolver ecuaciones e inecuaciones lineales, llevar a cabo operaciones entre conjuntos e identificar subconjuntos de R y $R^2$

*Construcción de la estructura "proceso" CSEL en su representación gráfica.* En la estructura "acción", cada estudiante asigna valores a $x$ o $y$, para reducir la ecuación de dos variables a una sola, con el fin de hallar algebraicamente algunos puntos que satisfagan la ecuación $ax + by = c$. Conforme la persona estudiante repite esta "acción", la interioriza en un "proceso" que, al coordinarse con el proceso de plano cartesiano, le permite construir el proceso del *CSEL* en su representación gráfica. En esta estructura, cada estudiante comprende que cualquier punto sobre la gráfica de la recta satisface la ecuación.

*Construcción de la estructura "proceso" del CSIL en su representación gráfica.* La persona estudiante, en la estructura "acción, encuentra algebraicamente algunos puntos que satisfacen la inecuación $ax + by < c$. Si la persona estudiante repite esta "acción", la interioriza en un "proceso" en el cual se imagina que infinitos puntos satisfacen la inecuación. Este "proceso" se coordina con las estructuras proceso del CSEL y del plano cartesiano, esto le permite construir el proceso del CSIL en su representación gráfica. En esta estructura, cada estudiante comprende que la representación gráfica del CSIL siempre estará acotada superior o inferiormente por la gráfica de la ecuación.

*Construcción de la estructura "objeto" del CSIL.* Si la persona estudiante realiza o imagina nuevas trasformaciones sobre la presentación grafica del CSIL. Por ejemplo, cuando utiliza la gráfica de una inecuación para determinar si un elemento satisface la relación algebraica y comprende a la representación gráfica de la inecuación como su conjunto solución. Además, es capaz de llevar a cabo operaciones como diferencia simétrica, complemento o unión entre los conjuntos solución de las inecuaciones $ax + by = c$, $ax + by < c$ y $ax + by > c$.

*Construcción de la estructura "proceso" del CSSIL en su representación gráfica.* La persona estudiante desencapsula el "objeto" CSIL en un "proceso" para representar gráficamente las inecuaciones presentes en el sistema. Este proceso se coordina con el proceso de intersección de conjuntos para graficar el CSSIL. En esta estructura, cada estudiante comprende al CSSIL como una intersección de conjuntos; es decir, reconoce

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

que un punto satisface el sistema si y solo si pertenece al conjunto solución de todas las inecuaciones presentes en él.

*Construcción de la estructura "objeto" del CSSIL.* Si cada estudiante crea conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica del CSSIL, consideramos que ha encapsulado el proceso del CSSIL en un objeto. En esta estructura, la persona estudiante puede determinar, mediante la representación gráfica del sistema, si un elemento pertenece al CSSIL. Además, tiene la capacidad de caracterizar el CSSIL a partir de la gráfica del sistema como un conjunto convexo, acotado o vacío.

**Diseño e implementación de instrumentos**

En APOE, el diseño y aplicación de tareas son fundamentales para identificar las estructuras construidas y los mecanismos mentales que las personas participantes emplean durante la solución (Arnon *et al*., 2014). Además, el papel de la entrevista es crucial para profundizar en estas estructuras y mecanismos mentales, así como para representar fielmente lo que comprende cada estudiante a través de la descomposición genética (Trigueros y Oktaç, 2019). Por ello, diseñamos dos instrumentos: una actividad con tres tareas y una entrevista semiestructurada.

Las tareas fueron elaboradas a partir de la DGP sobre el CSSIL. En la Tarea 1, esperamos que el grupo de estudiantes utilice la estructura proceso del CSEL, coordinada con la estructura proceso del plano cartesiano para representar gráficamente el CSIL. Además, esperamos que muestren evidencia de las acciones y procesos planteados como hipótesis en la DGP. Consideraremos si las personas estudiantes que construyeron una estructura proceso del CSIL pueden explicar cómo graficar una inecuación y una estructura objeto, y si pueden establecer conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica de la inecuación.

En la Tarea 2, esperamos que el grupo de estudiantes muestren la estructura proceso del CSIL y la coordinen con el proceso de intersección de conjuntos para representar gráficamente el CSSIL. Si las personas estudiantes reconocen que un punto del sistema pertenece a todas las inecuaciones del sistema, consideraremos que han construido la estructura proceso del CSSIL. Si establecen conexiones entre la representación gráfica y algebraica del sistema, pueden explicarlo usando la representación gráfica del sistema según la cual un punto pertenece al CSSIL o pueden caracterizarlo como vacío o acotado; consideraremos que han construido la estructura objeto del CSSIL. En la Tarea 3, cambiamos el símbolo ">" por "≥" para explorar cómo las personas estudiantes reflexionan gráfica y cognitivamente sobre este cambio de símbolo, así como para observar cómo varía el conjunto de solución de la inecuación y los sistemas de inecuaciones a partir de este cambio de símbolo.

El objetivo de la entrevista semiestructurada fue profundizar en las estructuras construidas y los mecanismos mentales mostrados por las personas participantes durante la solución de las tareas. Además, a partir de las entrevistas, esperábamos aumentar la fiabilidad del análisis de los datos, pues, al obtener una mayor cantidad de información sobre el razonamiento de las personas estudiantes, contamos con más elementos para interpretar el tipo de estructura construida. Por ejemplo, consideramos que, si alguien representa el CSIL, no es suficiente evidencia para interpretar que ha construido la estructura "proceso", si no puede explicar cómo lo realizó o no logra crear conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


Tabla 1. *Instrumento de recolección de información*

| |
|---|
| Tarea 1. Represente en el plano cartesiano todos los puntos que satisfacen $2x - 3y < 12$. Justifique ampliamente su respuesta. |
| Tarea 2. Represente en el plano cartesiano todos los puntos que satisfacen el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x - 3y < 12 \\ -2x + 5y < -10 \end{cases}$ |
| Tarea 3. Represente en el plano cartesiano todos los puntos que satisfacen el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x \geq 4 - y \\ 2y \leq -x + 8 \\ x \leq 4 \end{cases}$ |

Nota: fuente propia de la investigación.

En este estudio participaron 19 estudiantes entre 19 y 22 años, quienes cursaban el cuarto semestre del programa de Administración de Empresas en la Corporación Universitaria Autónoma de Nariño, sede Cali (Colombia). Provenientes de los estratos socioeconómicos uno, dos y tres, las personas estudiantes residían en Cali o en sus alrededores y pertenecían a una de las universidades privadas más reconocidas del suroccidente colombiano. Todas estaban matriculadas en la asignatura de Investigación de Operaciones, a cargo de una persona docente que aceptó colaborar en la investigación. Durante cuatro sesiones de clase, trabajaron con el CSSIL como parte del método gráfico de programación lineal, uno de los temas centrales del curso, para el cual ya contaban con conocimientos previos en Matemática Fundamental y Álgebra Lineal.

De este grupo, se seleccionaron tres estudiantes para aplicar las entrevistas semiestructuradas, con base en su capacidad para completar todas las tareas asignadas y su buen desempeño académico. Estas personas, con un promedio acumulado superior a 4,2 durante la carrera y un rol destacado en la asignatura, fueron identificadas mediante los seudónimos de Fernando, Eduardo y Julián.

La recolección de datos se llevó a cabo en el primer semestre del 2023, para ello citamos presencialmente a las 19 personas participantes para que resolvieran la actividad durante el horario de clases de la asignatura Investigación de Operaciones, bajo la supervisión de la persona profesora de la asignatura. La prueba se realizó de manera individual y tuvo una duración de hora y media. Además de proporcionar respuestas escritas, se les pidió que grabaran un video explicando cómo habían resuelto cada tarea, el cual debían enviar por WhatsApp al número del primer autor. La entrevista semiestructurada se llevó a cabo seis días después de la solución de las tareas, de manera remota a través de la plataforma Google Meet. Cada entrevista fue grabada en video, con el consentimiento de las personas participantes, utilizando la función de grabación de la plataforma. La duración promedio de las entrevistas fue de 45 minutos.

Para el análisis de los datos, inicialmente se realizó una copia digital de las respuestas escritas a las tareas que desarrollaron las personas participantes, las cuales fueron organizadas en una carpeta digital junto con los videos donde explicaban, de manera verbal, la solución de la actividad. Estos materiales constituyeron la base documental del estudio. A continuación, se procedió a la transcripción literal de los diálogos presentes en los videos, lo que permitió capturar no solo los procedimientos matemáticos empleados, sino también las justificaciones y reflexiones expresadas por las personas estudiantes durante el desarrollo de las tareas.

Con estos insumos, se llevó a cabo un análisis preliminar a partir de la DGP del

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

CSSIL, lo cual nos permitió identificar las estructuras y mecanismos mentales, así como las conexiones cartesianas que mostró el grupo de estudiantes. A partir de este análisis preliminar, seleccionamos tres participantes con producciones especialmente representativas en términos de claridad y profundidad. A estos tres estudiantes se les aplicó una entrevista semiestructurada; cada una fue transcrita de forma textual. Tanto las transcripciones de las entrevistas como las soluciones escritas y explicadas en video fueron analizadas por el primer autor del estudio, quien identificó los episodios significativos y elementos relevantes en relación con el marco teórico. Posteriormente, este análisis fue revisado y validado por el segundo autor, con el fin de asegurar la coherencia interpretativa y la fiabilidad de los resultados.

## Resultados

En esta sección, presentamos los mecanismos y estructuras mentales, así como las conexiones cartesianas que exhibieron los tres participantes entrevistados al resolver las tareas y responder las preguntas de la entrevista. La descripción de los resultados se realiza en función de las estructuras y mecanismos mentales descritos en la DGP sobre el CSSIL.

### Construcción de la estructura "proceso" del CSEL en su representación gráfica

A partir del diseño de las "tareas", esperábamos que la estructura "proceso" del CSEL emergiera durante su resolución. Observamos que las personas participantes utilizaron la gráfica de la ecuación para representar visualmente el CSIL y el CSSIL, establecieron conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica de la ecuación, y comprendieron en qué condiciones los elementos de la ecuación pertenecían al CSIL o al CSSIL.

Por ejemplo, en la Tarea 1, Eduardo comenzó por graficar la ecuación $2x - 3y = 6$ para representar gráficamente la inecuación. Para ello, primero determinó algebraicamente los puntos $(0, -4)$ y $(6, 0)$ que satisfacen la ecuación, luego los representó en el plano cartesiano y trazó una recta sobre ellos (Figura 2). De esto interpretamos que, en la estructura Acción del CSEL, Eduardo utilizó las estructuras previas de variable y ecuación para asignar valores a la variable $x$ y determinar el valor de la otra variable. Esta "acción" la repitió (Extracto 1) hasta interiorizarla en un "proceso", el cual coordinó con el proceso de plano cartesiano para construir el proceso del CSEL en su representación gráfica.

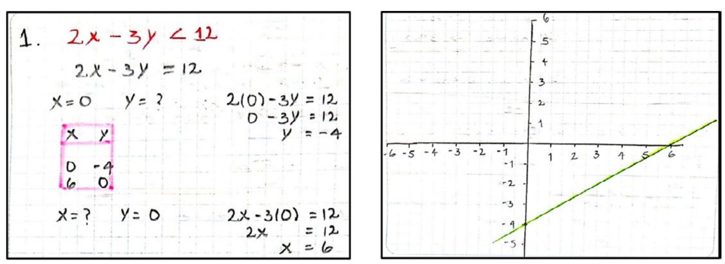


Figura 2. *Solución parcial de la Tarea 1 que realizó Eduardo*

Extracto 1. *Eduardo explica cómo graficar una ecuación.*

Investigador: ¿Por qué cambiaste la inecuación por una ecuación?
Eduardo: Lo que estuvimos viendo en los temas anteriores era así, lo igualé para poder sustituir los valores $x$ y $y$ pero en cero.
Investigador: Entonces es por indicación del docente, tú has reflexionado sobre ello.
Eduardo: Sí, solo por la explicación del docente… es para darle valores a la $x$ y a la $y$ para poderlo ubicar en la recta.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


En las “tareas”, esperábamos que las personas participantes relacionaran las soluciones de la ecuación, la inecuación y los sistemas de inecuaciones, con el fin de mostrar las estructuras mentales que construyeron sobre estos conceptos. En el caso de Fernando, durante la Tarea 2, observamos que estableció conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica del CSEL. Por ejemplo, le preguntamos si el punto (0, – 2), un punto sobre $-2x + 5y = -10$, satisface el sistema. Él respondió apoyándose en su representación gráfica (Figura 3), que el punto (0, – 2) no lo satisface porque no pertenece a la solución de la inecuación $-2x + 5y < -10$. Además, agregó que para que el punto pertenezca al sistema, la inecuación debería ser $-2x + 5y \leq -10$ (Extracto 2). A partir de esto, interpretamos que Fernando comprende que un punto sobre la recta satisface la ecuación, porque al cambiar el símbolo < por ≤, implica que todos elementos de la recta $-2x + 5y = -10$ satisfacen $-2x + 5y \leq -10$, y en consecuencia el punto (0, –2) pertenece al sistema de inecuaciones. Lo que expresa Fernando también podría ser útil para mostrar la estructura proceso para el CSIL y el CSSIL, pero más adelante nos enfocaremos en estas estructuras mentales.

Extracto 2. *Fernando establece conexiones cartesianas para la ecuación*

Investigador: ¿El punto (0, – 2) satisface el sistema de la Tarea 2?
Fernando: No satisface. En la inecuación número (1) si cumple, pero en la (2) no cumpliría (señala la Figura 3) porque como es menor debe estar para abajo (de la recta) o la inecuación debería ser menor o igual a -10…

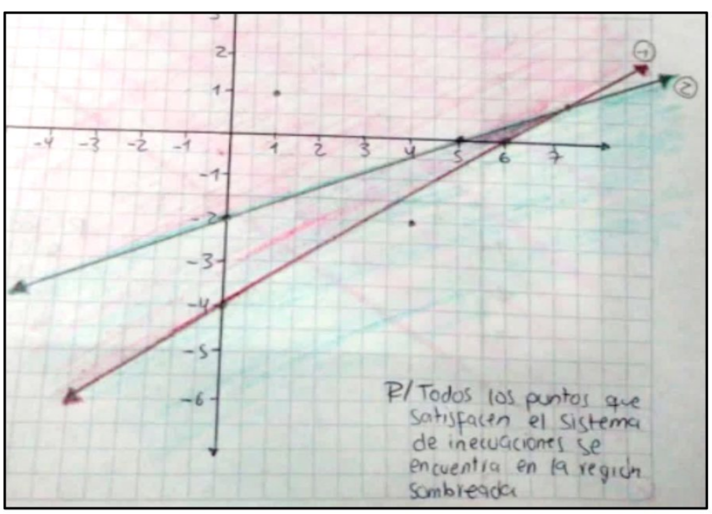


Figura 3. *Tarea 2 de Fernando*

### Construcción de la estructura “proceso” del CSIL en su representación gráfica

Los tres participantes exhibieron acciones similares al representar gráficamente el CSIL, las cuales consistieron en: 1) cambiar la inecuación por la ecuación, 2) representar el conjunto solución de la ecuación, 3) encontrar algebraicamente algunos puntos que satisfacen la inecuación y 4) trazar la región correspondiente al conjunto solución. Por ejemplo, en la Tarea 1, Fernando siguió el siguiente procedimiento para graficar $2x - 3y < 12$:1); cambió $2x - 3y < 12$ por $2x - 3y = 12$, 2); graficó $2x - 3y = 12$, 3) seleccionó el punto (5, – 4) por “debajo” y (2, 2) por “encima” de la ecuación; sustituyó estos puntos de la expresión $2x - 3y < 12$ para determinar cuál la satisface, y, 4) finalmente, como el punto (2, 2) pertenece a $2x - 3y < 12$, dibujó el CSIL en la parte superior de la recta $2x - 3y = 12$ (Figura 4).

Con base en lo descrito, interpretamos que en la estructura de acción del CSIL, Fernando encontró algebraicamente al menos un punto que satisface la inecuación, ya sea ubicado por encima o por debajo de la ecuación. Esta

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


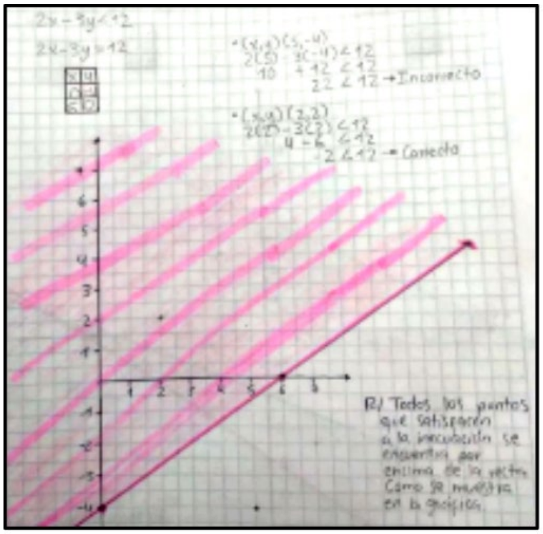


Figura 4. *Solución de la Tarea 1 que realizó Fernando*

"acción" la interiorizó como un "proceso", el cual le permitió deducir, a partir de la ubicación del punto encontrado, dónde se representa el CSIL. Este "proceso" lo coordinó con las estructuras de proceso de CSEL en su representación gráfica y del plano cartesiano, para construir la estructura de roceso del CSIL en su representación gráfica.

En la estructura "proceso", las personas estudiantes interiorizaron que el conjunto solución de $ax + by < c$ siempre estará por "encima" o por "debajo" de la ecuación $ax + by = c$. Por ejemplo, Eduardo explicó que para representar el CSIL de la Tarea 1 comenzaba con representar la ecuación y luego suponía que la "región" se extendía hacia arriba o hacia bajo de la recta. Elegía dos puntos del plano situados en la parte superior o inferior de la ecuación, los sustituía en la inecuación y, si ambos puntos satisfacían la desigualdad, entonces la región se extendía hacia donde estaban los puntos (Extracto 3).

Extracto 3. *Eduardo explica cómo representar gráficamente una inecuación*

Investigador: ¿Por qué a partir de dos puntos lograste generalizar que la solución está en la parte superior?
Eduardo: Me fijo en el plano cartesiano y uno supone que la región va hacia arriba y con dos puntos creo que estoy segura de la solución.
Investigador: ¿Bajo qué criterio eliges esos puntos?
Eduardo: Yo elijo cualquiera siempre y cuando esté por encima de la recta; es decir, hacia el lado donde creo que esta la región.

**Construcción de la estructura "objeto" del CSIL**

Si una persona estudiante utiliza la representación gráfica del CSIL para determinar si un punto pertenece a su conjunto solución y establece conexiones entre su representación algebraica y gráfica, interpretamos que está encapsulando el proceso del CSIL en un "objeto". Este mecanismo lo observamos en la respuesta de Fernando a la pregunta "¿El punto (-4,0) satisface la inecuación de la Tarea 1?". Él respondió que sí y justificó su respuesta utilizando tanto la representación gráfica como la algebraica (Extracto 4).

Que una persona estudiante represente gráficamente el CSIL a partir de su expresión algebraica no es suficiente evidencia para justificar que ha encapsulado el CSIL en un "objeto". Esto lo observamos en la Tarea 1, donde Julián representó gráficamente la inecuación $2x – 3y < 12$ (Figura 5); sin embargo, al ser preguntado si el punto (6,0) satisface esta inecuación, Julián respondió que es un punto que está sobre la

Extracto 4. *Eduardo establece conexiones cartesianas en la inecuación*

Investigador: ¿El punto (–4,0) satisface la inecuación 2x – 3y < 12?
Eduardo: Sí, porque se encuentra por arriba (de la recta) y está en la región.
Investigador: ¿Otra forma de probar esa afirmación?
Eduardo: El (–4,0) lo probaría en 2 (–4) – 3 (0) < 12, que eso daría –8 menor a 12.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

recta $2x - 3y = 12$, pero no pudo concluir que el punto no pertenece al CSIL (Extracto 5). A partir de esto, interpretamos que Julián no logró crear conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica de la inecuación, por lo que no surgió el mecanismo de encapsulación y no construyó el objeto CSIL.

Extracto 5. *Julián no establece conexiones para una inecuación*

Investigador: ¿El punto (6,0) satisface la inecuación 2x – 3y < 12?
Julián: ¿El (6,0)?
Investigador: Sí, un punto que está sobre la recta.
Julián: No me cumple porque me daría mayor a 12.
Investigador: ¿Te daría mayor?
Julián: Espere lo pienso… me daría 12 menor a 12.

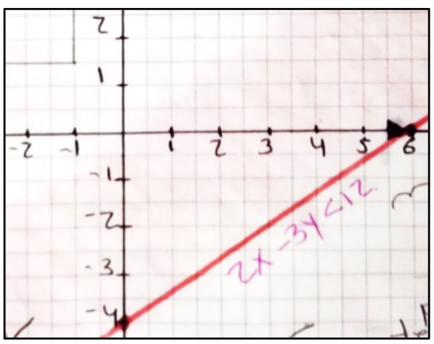


Figura 5. *Solución de la Tarea 1 que realizó Julián*

**Construcción de la estructura "proceso" del CSSIL en su representación gráfica**

Desde la DGP, esperábamos que las personas estudiantes construyeran el proceso de CSSIL en su representación gráfica al coordinar el proceso del CSIL en su representación gráfica con el proceso de intersección de conjuntos. Esta hipótesis se cumplió con Fernando y Eduardo, pero no la confirmamos con Julián, porque consideramos que él no había construido el proceso del CSIL en su representación gráfica. En el caso de Fernando y de Eduardo, para representar de forma gráfica el CSSIL: 1) representaban gráficamente las inecuaciones del sistema, usando colores diferentes para distinguir cada conjunto, 2) identificaban la intercesión de los conjuntos y 3) concluían cuál era la representación gráfica del CSSIL. Por ejemplo, Eduardo representó el CSSIL de la Tarea 2 siguiendo el procedimiento: 1) representó de manera gráfica las inecuaciones $2x - 3y < 12$ y $-2x + 5y < -10$ usando los colores morado y verde, respectivamente; 2) identificó la intercesión de los dos conjuntos y 3) concluyó que la solución del sistema estaba donde se interceptaban ambos conjuntos (Figura 6).

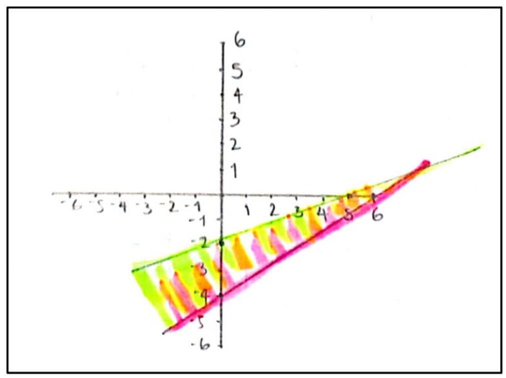

Figura 6. *Representación de Eduardo sobre del CSSIL de la Tarea 2*

En la estructura de "proceso", el grupo de estudiantes comprendía el CSSIL como un conjunto infinito y lo asociaba con un polígono formado por la intersección de las inecuaciones del sistema. Además, lograron reconocer la necesidad de que hubiera dos o más inecuaciones para resolver un sistema. Por ejemplo, Eduardo relacionó el CSSIL de la Tarea 2 con un polígono donde se interceptan el conjunto solución de las inecuaciones y mencionó la necesidad de que al menos existiera otra inecuación para resolver el sistema (Extracto 6).

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


Extracto 6. *Eduardo caracteriza el CSSIL*

Investigador: ¿Cuál es el papel de la inecuación en el sistema de inecuaciones?
Eduardo: Con la inecuación nos damos cuenta hacia qué lado del plano cartesiano se va a ubicar el polígono donde se interceptan todas las regiones… Por ejemplo, en este punto (Tarea 1) que hay una sola inecuación no podríamos sacar el polígono, tendrían que haber más (inecuaciones).

Los resultados muestran que, si un estudiante no ha construido el proceso de CSIL en su representación gráfica, esto afecta la construcción del proceso de CSSIL. Esta conclusión se deriva de las respuestas de Julián, quien, como recordamos, representó el CSIL en la Tarea 1, pero no logró crear conexiones cartesianas entre su representación gráfica y algebraica (Extracto 5). Consideramos que esto influyó en la solución de la Tarea 3, donde representó las inecuaciones del sistema como si fueran rectas ($x = 4$, $-x + 2y = 8$, y $x = 4 - y$), en lugar de las tres inecuaciones como se esperaría según la DGP (Figura 7).

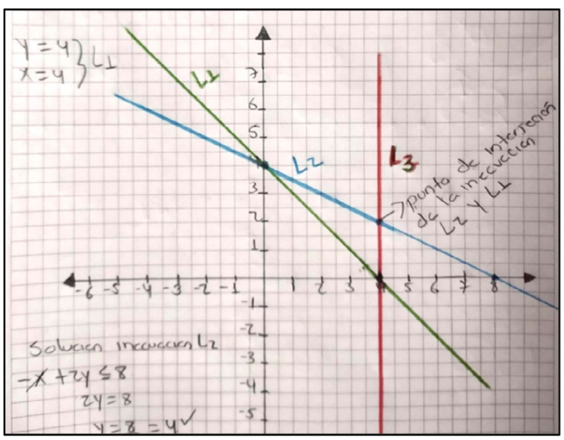


Figura 7. *Solución de la Tarea 3 de Julián*

## Construcción de la estructura "objeto" del CSSIL

Si un estudiante establece conexiones entre la representación gráfica y algebraica del CSSIL y comprende que un punto pertenece al sistema si y sólo si satisface todas sus inecuaciones, consideramos que ha encapsulado el CSSIL como un "objeto". Por ejemplo, cuando se le preguntó a Fernando si el punto (3,2) satisface el sistema de la Tarea 3, él respondió apoyándose en la gráfica del sistema, que el punto sí lo satisface (Extracto 7). De esta respuesta, interpretamos que Fernando no necesitó de la representación algebraica para responder si el punto (3,2) pertenece al CSSIL, porque comprende que cualquier punto sobre la representación gráfica del sistema es una solución. Además, Fernando explicó que el punto (2,5) no forma parte del sistema porque satisface las inecuaciones uno y tres, pero no la dos. A partir de esto, concluimos que Fernando desencapsuló el objeto del CSSIL en el proceso de CSIL en su representación gráfica e intersección de conjuntos, al utilizar la representación gráfica de las inecuaciones del sistema y el proceso de intercepción de conjuntos para justificar que el punto (2,5) no pertenece al CSSIL de la Tarea 3.

Extracto 7. *Fernando establece conexiones para el CSSIL*

Investigador: ¿Por qué separas las inecuaciones para resolver el sistema?
Fernando: Separar las inecuaciones me permite encontrar los puntos que solucionan el sistema, que es donde se interceptan todas las regiones de las inecuaciones.
Investigador: El punto (3,2), ¿satisface el sistema (Tarea 3)?
Fernando: Sí satisface el sistema (apoya su respuesta señalando con el cursor la representación gráfica de la solución de la Figura 8).
Investigador: ¿El punto (2,5) también satisface el sistema?
Fernando: No satisface el sistema de inecuaciones, solamente cumpliría en la inecuación 1 y en la 3, pero no en la 2 (explica usando la representación gráfica).

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


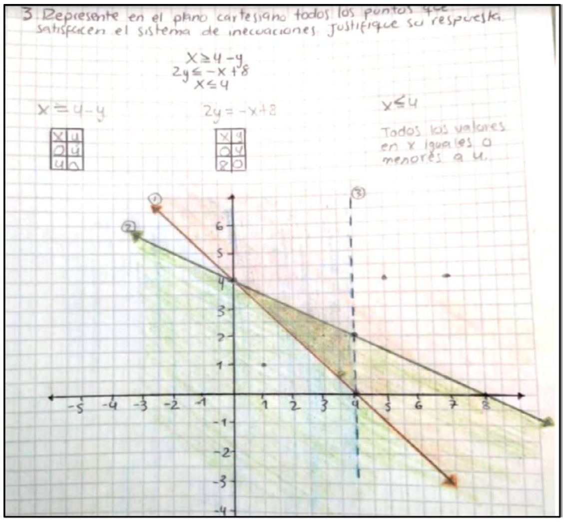


Figura 8. *Solución Tarea 3 de Fernando*

## Discusión

Los resultados revelaron que la mayoría de las pesonas participantes solo muestran evidencia de comprender los conceptos matemáticos en las estructuras de Acciones y Procesos, lo cual concuerda con hallazgos de otras investigaciones. Por ejemplo, en el estudio de Moon (2020), el grupo solo mostró comprender el conjunto de solución de una inecuación en dos variables en la estructura de "acción" y, en algunos casos, como un "proceso". En el trabajo de Trigueros y Martínez-Planell (2010), se señaló que los estudiantes enfrentan dificultades para construir la estructura objeto de la representación gráfica de funciones de dos variables, limitando sus concepciones a las estructuras de proceso y acción.

En Moon *et al*. (2013), se señaló que, si un o una estudiante representa gráficamente una relación matemática a partir de una expresión algebraica, no constituye evidencia suficiente para concluir que establece conexiones cartesianas entre ambas representaciones. Este hallazgo también se evidenció en nuestra investigación, particularmente en el caso de Julián en la Tarea 1, como se mostró en la sección 5.3, donde el estudiante representó gráficamente $2x - 3y < 12$, pero no estableció conexiones entre la representación gráfica y algébrica del CSIL.

Los resultados de esta investigación muestran que, en la estructura de "proceso", una persona estudiante representa gráficamente una relación matemática a partir de su representación algebraica. Con estos resultados, consideramos que la propuesta de Abramovich y Connell (2015), para la enseñanza de sistemas de inecuaciones, solo permitiría alcanzar las estructuras de "proceso". Esto se debe a que las herramientas tecnológicas les permiten a las personas estudiantes visualizar el conjunto solución del sistema, pero no sería suficiente para promover que realicen conexiones entre la representación gráfica y algebraica de un sistema. Esto también puede verse corroborado en el estudio de Loska *et al*. (2024) en el cual se aprecia que las personas estudiantes no solo necesitan representar gráficamente el CSSIL para comprender un concepto en niveles más avanzados, sino que es necesario que establezcan relaciones entre las diferentes representaciones del sistema, incluyendo el lenguaje verbal o la resolución de problemas.

En relación con Moon (2020), encontramos que algunos de sus resultados coinciden con algunos de los nuestros. Por ejemplo, para graficar el CSIL algunas de las personas participantes en Moon (2020) utilizaban el método de prueba, el cual consistía en representar el conjunto solución a partir de un punto que satisface la inecuación. Este procedimiento también lo observamos en nuestra investigación en la sección 5.2, cuando Fernando explicó cómo representó gráficamente el CSIL de la Tarea 1.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


Además, Moon (2020) encontró que sus estudiantes tenían dificultades para establecer conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica; aspecto que también lo observamos con Julián en la sección 5.3. Ante esto, sugerimos que en la enseñanza de las inecuaciones en dos variables se diseñen propuestas alternativas al método de prueba, que ayude a las personas estudiantes a construir la estructura objeto del CSIL y, posteriormente, contribuir a comprender como objeto el CSSIL.

La entrevista semiestructurada resultó ser una herramienta fundamental para el desarrollo de esta investigación, pues permitió identificar las estructuras mentales construidas por quienes participaron para comprender el CSSIL, así como para conocer las conexiones cartesianas que establecieron para el conjunto solución de la ecuación, inecuación y sistemas de inecuaciones. Por esta razón, coincidimos con las posturas de Moon (2020) y Trigueros y Martínez-Planell (2010), quienes mencionan que la entrevista es un buen instrumento metodológico para identificar las estructuras y mecanismos mentales que las personas participantes muestran durante una investigación con APOE, y que quizás no podrían observarse solo a través de las tareas.

Una de las contribuciones de este estudio radica en mostrar las estructuras y mecanismos mentales que cada estudiante podría emplear para comprender el CSSIL, proporcionando así una herramienta valiosa para docentes y personas investigadoras en Educación Matemática. Estos resultados pueden ser aprovechados en el diseño de actividades para el aula y en la planificación de investigaciones que fomenten la construcción de las estructuras proceso y objeto del CSSIL.

En esta investigación identificamos dos principales limitaciones. La primera se refiere al número de personas estudiantes analizadas, dado que el estudio se centró únicamente en el análisis de los tres participantes entrevistados. Por ello, sugerimos que futuras investigaciones sobre el CSSIL consideren una muestra más amplia, pues permitiría obtener una perspectiva más generalizable. La segunda limitación está relacionada con el tipo de tareas diseñadas; consideramos pertinente que en estudios posteriores se incluyan actividades que fomenten nuevas transformaciones en la representación gráfica del CSSIL, así como el tránsito entre los registros gráfico y algebraico. Además, reconocemos que en el diseño de las tareas no se exploraron suficientemente contextos externos a la matemática, como la economía u otras ciencias. Incorporar estos contextos les habría permitido a las personas estudiantes interactuar con otros registros, como el lenguaje verbal y la resolución de problemas, promoviendo escenarios más ricos para evidenciar elementos de las estructuras de objeto y esquema del CSSIL.

## Conclusiones

Los resultados de esta investigación muestran que las personas estudiantes construyen la estructura objeto del CSSIL al coordinar la estructura proceso del CSIL con la estructura proceso de intersección de conjuntos, tal como se había propuesto en la DGP sobre el CSSIL. Además, encontramos que asociaban la representación gráfica del CSSIL con polígonos o regiones. En la DGP se planteó la hipótesis de que para construir la estructura objeto del CSSIL era necesario que hubieran construido previamente la estructura objeto del CSIL. Esta hipótesis se

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470


verificó con el participante Julián, quien no logró construir la estructura objeto del CSSIL debido a sus dificultades para establecer la estructura objeto del CSIL.

Las personas participantes que exhibieron una estructura de acción, proceso u objeto para el conjunto solución de una ecuación o inecuación, mostraban el mismo tipo de estructura para el CSSIL. Es decir, si una persona participante construyó el CSIL en la estructura de "proceso", también evidenciaba la estructura proceso para el CSSIL. Por ejemplo, durante la resolución de las tareas y al responder las preguntas de la entrevista semiestructurada, Fernando evidenció la estructura de objeto para el CSIL, misma estructura que construyó para el CSSIL, como se describe en la sección 5.5.

Según los resultados obtenidos en este estudio, podemos concluir que, en una versión refinada de la DGP, las personas estudiantes en la estructura "acción" representaban gráficamente el CSSIL siguiendo señales externas, pero sin crear conexiones cartesianas entre las representaciones gráfica y algebraica del sistema; en otras palabras, no reconocen la representación gráfica como el conjunto solución del CSSIL. En la estructura "proceso", los estudiantes han interiorizado las acciones necesarias para representar gráficamente el conjunto solución y reconocen al CSSIL como la intersección de los conjuntos solución de las inecuaciones que lo componen. Además, llevan a cabo conexiones cartesianas entre las representaciones gráfica y algebraica, comprendiendo que los elementos representados de forma gráfica son soluciones de la expresión algebraica.

Finalmente, en la estructura "objeto", las personas estudiantes reconocen la representación gráfica como el conjunto solución del sistema y son capaces de realizar nuevas transformaciones sobre ella para justificar o ejemplificar si un elemento satisface o no al sistema. Además, se verifica empíricamente el papel de la estructura objeto del CSEL y CSIL para la construcción de la estructura objeto del CSSIL.

La articulación de APOE y conexión cartesiana la consideramos útil para describir la representación gráfica y la comprensión de objetos matemáticos como inecuaciones en dos variables, sistemas de inecuaciones y funciones en una o dos variables. Esta perspectiva teórica presenta similitudes con la propuesta de Trigueros y Martínez-Planell (2010), que vincula la APOE con la teoría de registros semióticos. Ambas articulaciones entre estos marcos teóricos permiten estudiar cómo las personas estudiantes comprenden los objetos matemáticos a través de representaciones algebraicas y gráficas.

Consideramos que la investigación sobre el CSSIL representa una contribución significativa al campo de la Educación Matemática, en el contexto de las inecuaciones. Este estudio amplía la investigación existente, que hasta ahora se había centrado, principalmente, en inecuaciones de una sola variable, al explorar el CSSIL.

## Financiamiento

Las personas autoras declaramos que no recibimos financiamiento directo de ninguna organización. Sin embargo, el primer autor de esta investigación fue becario Conahcyt, lo que contribuyó al desarrollo de esta investigación.

## Consentimiento informado

Este documento fue revisado y aprobado para su publicación por el Comité de Ética de la universidad. Además, las

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

personas participantes fueron informadas previamente sobre el estudio y firmaron un consentimiento voluntario.

## Inteligencia Artificial

Las personas autoras de esta investigación declaramos que no usamos inteligencia artificial para el desarrollo de esta investigación.

## Conflicto de intereses

Las personas autoras declaran no tener algún conflicto de interés.

## Declaración de la contribución de las personas autoras

Todas las personas autoras afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo. Ambas personas autoras contribuimos en todos los elementos de la investigación en 60 % y 40 %, respectivamente.

## Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [**A. M. O.**], previa solicitud razonable.

## Preprint

Una versión Preprint de este artículo fue depositada en: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.9654

## Referencias

Abramovich, S. y Connell, M. L. (2015). Digital fabrication and hidden inequalities: Connecting procedural, factual, and conceptual knowledge. *International Journal of Technology in Teaching and Learning*, *11*(2), 76-89.

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Betancur, A., Fuentes, S. R. y González, M. P. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo Mental. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *22*, 23-46.

Biney, S. K., Ali, C. A. y Adzifome, N. S. (2023). Errors and misconceptions in solving linear inequalities in one variable. *Journal of Advanced Science and Mathematics Education*, *3*(1), 15-26. https://doi.org/10.58524/jasme.v3i1.195

Blanco, L. J. y Garrote, M. (2007). Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *3*(3), 221-229. https://doi.org/10.12973/ejmste/75401

Borji, V. y Martínez-Planell, R. (2020). On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(2), 163-179. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09991-y

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H. y Sánchez, A. (2018). Application of the complementarities of two theories, APOS and OSA, for the analysis of the university students' understanding on the graph of the function and its derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(6), 2301-2315. https://doi.org/10.29333/ejmste/89514

Borji, V., Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2024). Students' Understanding of Riemann Sums and Double Integrals: The Case of Task Design in APOS Theory. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s40753-024-00250-6

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Brijlall, D. y Ndlazi, N. J. (2019). Analysing engineering students' understanding of integration to propose a genetic decomposition. *Journal of Mathematical Behavior*, *55*(February), 0-1. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.006

Çekmez, E. (2021). Investigating the effect of computer-supported instruction on students' understanding of different representations of two-variable inequalities. *Interactive Learning Environments*, *31*(6), 3305-3325. https://doi.org/10.1080/10494820.2021.1926288

Chamberlain, D. y Vidakovic, D. (2021). Cognitive trajectory of proof by contradiction for transition-to-proof students. *Journal of Mathematical Behavior*, *62*(June), 100849. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100849

Çiltaş, A. y Tatar, E. (2011). Diagnosing Learning Difficulties Related to the Equation and Inequality that Contain Terms with Absolute Value. *International Online Journal of Educational Sciences*, *3*(2), 461-473. https://iojes.net/index.jsp?mod=tammetin&makaleadi=&makaleurl=IOJES_431.pdf&key=41283

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335-359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Dubinsky, Ed. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer Netherlands.

Edwards, T. G. y Chelst, K. R. (1999). Promote Systems of Linear Inequalities with Real-World Problems. *The Mathematics Teacher*, *92*(2), 118-123. https://doi.org/10.5951/mt.92.2.0118

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E. y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107-122. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. *Journal of Mathematical Behavior*, *46*(April), 128-143. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.04.001

Kabaca, T. (2013). Using dynamic mathematics software to teach one-variable inequalities by the view of semiotic registers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *9*(1), 73-81. https://doi.org/10.12973/eurasia.2013.917a

Loska, F., Ayuni, A. y Ainirohmah, N. (2024). Exploring Potential: Analysis of Students' Mathematical ProblemSolving Ability on System of Linear Inequalities in Two Variables (SLITV) Material. *International Journal of Applied Learning and Research in Algebra*, *1*(1), 48-60. https://doi.org/10.56855/algebra.v1i1.1168

Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 365-384. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9408-8

Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior*, *55*(September), 100687. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003

Martinez-Planell, R. y Trigueros, M. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM–Mathematics Education*, *53*. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01233-6

Moon, K. (2020). New approaches for two-variable inequality graphs utilizing the Cartesian Connection and the APOS theory. *Educational Studies in Mathematics*, *104*(3), 351-367. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09956-1

Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B. y Okamoto, Y. (2013). Prospective Secondary Mathematics Teachers' Understanding and Cognitive Difficulties in Making Connections among Representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(3), 201–227. https://doi.org/10.1080/10986065.2013.794322

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among. En T. Romberg, E. Fennema y T. Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions* (pp. 69-99).

Ndlovu, L. y Ndlovu, M. (2020). The effect of graphing calculator use on learners' achievement and strategies in quadratic inequality problem solving. *Pythagoras*, *41*(1), 1-13. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v41i1.552

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.23
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Schreiber, I. y Tsamir, P. (2012). Different Approaches to Errors in Classroom Discussions: The Case of Algebraic Inequalities. *Investigations in Mathematics Learning*, *5*(1), 1-20. https://doi.org/10.1080/24727466.2012.11790317

Switzer, M. (2014). Graphing inequalities, connecting meaning. *The Mathematics Teacher*, *107*(8), 580-584. http://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.107.8.0580

Tamba, K. P., Saragih, M. J. y Listiani, T. (2018). Learning Trajectory of Quadratic Inequality. *JOHME: Journal of Holistic Mathematics Education*, *2*(1), 12-21. https://doi.org/10.19166/johme.v2i1.1202

Trigueros, M. B. E., Sánchez-Matamoros, G. y Hernández-Rebollar, L. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM - Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task design in APOS theory. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *15*, 43-55. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.256

Vásquez, C. y Parraguez, M. (2015). Construcciones mentales para el aprendizaje de conceptos básicos del álgebra lineal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*(3), 37-74.

Verikios, P. y Farmaki, V. (2010). From equation to inequality using a function-based approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(4), 515-530. https://doi.org/10.1080/00207390903564611

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-21. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr