Uniciencia Vol. 39(1), pp. 1-25, January-December, 2025
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr
DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

Modelización matemática en temas de Cálculo: dos aproximaciones tecnológicas a un problema de optimización

Mathematical modeling in calculus: two technological approaches to an optimization problem

Modelagem matemática em cálculo: duas abordagens tecnológicas para um problema de otimização

Mihály Martínez-Miraval[1]*, Daysi García-Cuéllar[2], Mathías Tejera[3], Agustín Curo Cubas[1]

Received: Sep/16/2024 • Accepted: Apr/22/2025 • Published: Nov/30/2025

Resumen

[Objetivo] El estudio tuvo por objetivo analizar el proceso de modelización que realizan estudiantes en etapa universitaria al resolver un problema que involucra la noción de optimización de funciones. **[Metodología]** Se trata la modelización matemática desde la perspectiva denominada "modelos y modelización", y se hace uso de los ciclos de modelización de Blum, Leiß y Borromeo-Ferri, así como del ciclo extendido para el uso de las tecnologías digitales, para describir los procesos que realiza el estudiantado en su resolución. El diseño de investigación es el estudio de casos múltiples de tipo instrumental. Se reporta el trabajo de dos estudiantes de segundo ciclo de la carrera de Administración de una universidad de Lima-Perú, matriculados en el curso Cálculo del primer semestre del 2022. La recolección de datos se llevó a cabo mediante fichas de trabajo, archivos de GeoGebra y entrevistas semiestructuradas. **[Resultados]** Los resultados muestran que el alumnado desarrolló habilidades en tres ámbitos: en el mundo real, al entender que el costo del cableado varía según la longitud y el tipo de cable; en el mundo matemático, al crear y usar un modelo matemático para optimizar una función aplicando conocimientos previos de cálculo; y en el mundo computacional, al emplear GeoGebra para aplicar estos conceptos. **[Conclusiones]** Se concluye que GeoGebra es una herramienta sólida para el desarrollo de problemas de modelización, dado que, en su interfaz se pueden conectar los campos numérico, algebraico, geométrico y variacional, así como brindar una mejor interpretación del fenómeno de cambio que subyace a un problema de optimización.

Palabras clave: modelización matemática; ciclos de modelización; optimización; GeoGebra; funciones económicas; criterios de derivación; matemática educativa.

* Corresponding author
Mihály Martínez-Miraval, pcmammar@upc.edu.pe, https://orcid.org/0000-0001-7734-1223
Daysi García-Cuéllar, garcia.daysi@pucp.pe, https://orcid.org/0000-0003-0243-6353
Mathías Tejera, mathias.tejera@utec.edu.uy, https://orcid.org/0000-0002-9826-966X
Agustín Curo Cubas, agustin.curo@upc.edu.pe, https://orcid.org/0009-0009-7084-2573
1 Departamento de Ciencias, Línea de Matemáticas, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Lima, Perú.
2 Departamento Académico de Ciencias, Sección Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
3 Departamento de Innovación y Emprendimiento, Especialización en Tecnología Educativa, Universidad Tecnológica, Montevideo, Uruguay.

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

[Objective] The study aimed to analyze the modeling process conducted by university students when solving a problem involving the notion of function optimization. **[Methodology]** Mathematical modeling is approached from the perspective known as models and modeling, utilizing the modeling cycles from Blum, Leiß, and Borromeo-Ferri, as well as the extended cycle for the use of digital technologies, to describe the processes students conduct during their resolution. The research design is an instrumental multiple case study. The paper reports the work of two second-semester students from the Business Administration program at a university in Lima, Peru, enrolled in the Calculus course during the first semester of 2022. Data was collected using worksheets, GeoGebra files, and semi-structured interviews. **[Results]** Results show that students developed skills in three areas: in the real world, by understanding that the cost of wiring varies according to the length and type of cable; in the mathematical world, by creating and using a mathematical model to optimize a function by applying prior knowledge on calculus; and in the computational world, by using GeoGebra to apply these concepts. **[Conclusions]** It is concluded that GeoGebra is a solid tool for developing modeling problems since its interface allows connecting the numerical, algebraic, geometric, and variational fields, providing a better interpretation of the phenomenon of change underlying an optimization problem.

Keywords: mathematical modeling; modeling cycles; optimization; GeoGebra; economic functions; derivation criteria; mathematics education.

Resumo

[Objetivo] O estudo teve como objetivo analisar o processo de modelagem realizado por estudantes universitários na resolução de um problema que envolve a noção de otimização de funções. **[Metodologia]** A modelagem matemática é abordada sob a perspectiva denominada “modelos e modelagem”, utilizando os ciclos de modelagem de Blum, Leiß e Borromeo-Ferri, bem como o ciclo estendido para o uso de tecnologias digitais, para descrever os processos realizados pelos estudantes em sua resolução. O delineamento da pesquisa é o estudo de múltiplos casos de tipo instrumental. Relata-se o trabalho de dois alunos do segundo ciclo do programa de Administração de uma universidade em Lima, Peru, matriculados no curso de Cálculo para o primeiro semestre de 2022. A coleta de dados foi realizada por meio de planilhas, arquivos do GeoGebra e entrevistas semiestruturadas. **[Resultados]** Os resultados mostram que os alunos desenvolveram habilidades em três áreas: no mundo real, ao entender que o custo da fiação varia dependendo do comprimento e do tipo de cabo; no mundo matemático, ao criar e usar um modelo matemático para otimizar uma função aplicando conhecimentos prévios de cálculo; e no mundo computacional, ao usar o GeoGebra para aplicar esses conceitos. **[Conclusões]** Conclui-se que o GeoGebra é uma ferramenta sólida para o desenvolvimento de problemas de modelagem, uma vez que sua interface pode conectar os campos numérico, algébrico, geométrico e variacional, além de fornecer uma melhor interpretação do fenômeno de mudança subjacente a um problema de otimização.

Palavras-chave: modelagem matemática; ciclos de modelagem; otimização; GeoGebra; funções econômicas; critérios de derivação; matemática educacional.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

Introducción

La derivada, como concepto fundamental en el Cálculo, desempeña un papel crucial tanto en la construcción del pensamiento matemático del estudiantado como en la resolución de problemas en diversos contextos. Desde la Educación Matemática, la literatura relacionada con el cálculo destaca la importancia de la derivada en el estudio de las matemáticas (Trigueros *et al*., 2024; Vrancken y Engler, 2014). Los procesos cognitivos que desarrolla el estudiantado al articular las nociones de función, pendiente y límite en su definición asociada con rectas tangentes han sido investigados de forma amplia (Illanes *et al*., 2023; Bataineh *et al*., 2019). Además, otros investigadores han puesto el foco en la relación del concepto de derivada con la razón de cambio instantáneo, al partir de la idea de límites y razones de cambio (García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2023). Otros autores (Martínez-Miraval *et al*., 2023; Tejera *et al*., 2022; LaRue e Infante, 2015) han centrado su atención en resolver problemas extramatemáticos, en los cuales se movilizan nociones de monotonía, concavidad y optimización de funciones. Estas aproximaciones muestran cómo el estudio de la derivada abarca tanto procesos cognitivos asociados a la comprensión de nociones matemáticas clave, como su aplicación en problemas prácticos, lo cual lleva a una reflexión más profunda sobre su enseñanza y aprendizaje desde múltiples enfoques teóricos.

Diversos enfoques teóricos se han aplicado para estudiar la comprensión de la derivada, al reflejar la diversidad de perspectivas en la enseñanza y aprendizaje de este concepto clave en el cálculo. Los trabajos antes mencionados abordan el estudio de la derivada desde diversas perspectivas como la teoría de los registros de representación semiótica (García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2023), la aproximación instrumental y el razonamiento covariacional (Martínez-Miraval *et al*., 2023; Vrancken y Engler, 2014), el enfoque ontosemiótico (Illanes *et al*., 2023), la teoría APOE (Trigueros *et al*., 2024), la resolución de problemas LaRue e Infante, 2015), entre otros.

Lo anterior evidencia el interés de las personas investigadoras por realizar propuestas que le permita al estudiantado comprender la derivada y las diferentes nociones y conceptos asociados a él. Sin embargo, en el contexto del trabajo de aula, la mayoría de las veces prima el campo algebraico por sobre otros; es decir, el uso de técnicas para derivar, o criterios con derivadas que explican la monotonía, concavidad y optimización de funciones, primando un pensamiento estático, sobre uno dinámico (Barajas *et al*., 2018; Thompson y Dreyfus, 2016; Mkhatshwa y Doerr, 2018). Con esto se limita así, el desarrollo de un pensamiento más dinámico y enfocado en lo conceptual que podría abordarse mediante estrategias como la modelización matemática.

En este contexto, la modelización matemática se presenta como una alternativa que le facilita a cada estudiante, por un lado, acercar la matemática a aspectos de la realidad, y, por otro lado, generar nuevo conocimiento matemático o movilizar conocimientos previos adaptándolos a una situación problema. La modelización matemática se percibe como un proceso que involucra el tránsito bidireccional entre el mundo real y el de las matemáticas (Borromeo-Ferri, 2018). Asimismo, la modelación matemática puede ser considerada como una actividad que ubica el tránsito entre estos dos mundos como el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Blomhoj, 2008).

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

Este proceso de tránsito entre los mundos real y matemático se puede ver como un ciclo con varias etapas. En el mundo real, al partir de una situación, que es transformada luego por un sujeto en un problema que intentará resolver.

Para resolverlo, se ve en la necesidad de crear un modelo matemático de dicha realidad, lo cual genera el tránsito del mundo real al mundo de las matemáticas. Los procesos matemáticos y las posibles soluciones del problema obtenidas en el mundo matemático deben ser validados y contrastados con la situación real, esto implica el tránsito en la otra dirección, del mundo matemático al real (Di Blasi *et al*., 2024). Estas etapas que componen el ciclo, por lo general, no se dan de forma lineal, dependerá de la manera en cómo el sujeto estructura y simplifica la información en el mundo real y cómo la procesa en el mundo matemático (Maaß, 2006).

La importancia de que los individuos transiten del mundo real al mundo matemático y viceversa, se centra en las habilidades que pueden desarrollar en cada etapa del proceso. Por ejemplo, interpretar el problema y construir un modelo real de la situación implica simplificaciones de información, identificación de variables pertinentes, entre otros. Estas habilidades son desarrolladas dentro del mundo real. Al crear un modelo matemático, se debe matematizar la información, elegir conceptos matemáticos, realizar representaciones de estos conceptos y de sus relaciones; habilidades propias del mundo matemático. Otras habilidades se desarrollan al dar solución a interrogantes propias del modelo, mediante métodos y técnicas matemáticas; o al analizar las soluciones matemáticas en contextos extramatemáticos; así como, al validar, comunicar y reflexionar sobre el ciclo realizado (Maaß, 2006).

El desarrollo de estas habilidades, tanto en el mundo real como en el matemático, se ve potenciado por el uso de tecnologías digitales, consideradas como herramientas potentes en la modelización matemática debido a sus bondades relacionadas con el dinamismo al realizar cambios simultáneos entre variables, la visualización de estos cambios, las simulaciones, los cálculos inmediatos, entre otros aspectos (Zengin, 2018; Blum, 2015). Además, al utilizar herramientas digitales en la modelación matemática, el estudiantado realiza otros procesos de traducción. Por un lado, del idioma en el campo de la matemática al idioma de la computadora, con sus respectivas exploraciones y lógica empleada en las construcciones por computadora. Y por otro, una traducción del lenguaje de computadora al lenguaje matemático para entender los resultados obtenidos (Greefrath y Vorhölter, 2016).

La formulación de problemas en el contexto de la modelización matemática es clave para fomentar el aprendizaje, aunque existen diferentes posturas sobre el tipo de contexto que debe utilizarse. Un problema se puede considerar como una tarea que un individuo intenta resolver para llegar a una solución, para la cual no cuenta desde un inicio con un procedimiento accesible capaz de garantizar que llegue a tal solución (Ortiz, 2001). Existen diversas opiniones con respecto al contexto en el que se debe formular un problema al estudiantado desde un enfoque de modelización matemática. Algunas personas investigadoras señalan que el problema debe ser de contexto real (Blum, 1993); pero otros grupos de investigadores con perspectivas diferentes trabajan la modelización matemática con fines didácticos, donde el problema planteado permita aplicar conocimiento matemático para resolverlo y podría involucrar contextos reales o ficticios (Villarreal y Mina, 2013).

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

Además, la forma en que se plantean estos problemas, las tecnologías disponibles y las representaciones utilizadas, condicionan los caminos de resolución, las estrategias y los conocimientos a aplicar y desarrollar (Villa-Ochoa *et al*., 2017). Estas distintas perspectivas reflejan la diversidad de enfoques en la enseñanza de la modelización, ya sea orientada a la resolución de problemas reales o como una herramienta didáctica más amplia, al preparar el terreno para analizar cómo estas prácticas se integran en el aula.

En resumen, la modelización matemática se presenta como una herramienta versátil en la enseñanza del cálculo, tanto para desarrollar habilidades específicas de modelación como para facilitar la comprensión de conceptos matemáticos más amplios. Las diversas perspectivas sobre su aplicación reflejan la riqueza y complejidad del enfoque, y abren el debate sobre el tipo de problemas y contextos más adecuados para fomentar el aprendizaje significativo. En este sentido, el diseño de tareas cobra especial relevancia, pues la formulación adecuada de problemas que integren el concepto de derivada, junto con el uso de recursos tecnológicos, le permite al alumnado interactuar de manera dinámica con las matemáticas y aplicar sus conocimientos en situaciones reales o simuladas.

Así, esta investigación tiene por objetivo analizar el proceso de modelización que realizan estudiantes en etapa universitaria al resolver un problema que involucra la noción de optimización de funciones. Para eso, resulta esencial profundizar en los enfoques teóricos que sustentan estas prácticas, lo cual se abordará en la siguiente sección, donde se explorarán las bases conceptuales que fundamentan el uso de la modelización matemática en el aula, así como el rol que desempeñan las tecnologías en este proceso.

Aspectos teóricos

El estudio considera aspectos teóricos relacionados con el ciclo de modelización que propone Blum y Leiß (2007) y amplía Borromeo-Ferri (2010). Además, su extensión al interactuar con tecnologías digitales que propone Greefrath (2011). En ambos casos, para explicar los procesos de resolución que sigue el alumnado para resolver un problema. Asimismo, el problema se diseñó con un fin didáctico que puede explicarse desde la perspectiva denominada *modelos y modelización* desarrollada por Lesh y Doerr (2003).

La modelación matemática puede considerarse, según Blomhoj (2008), como una actividad que ubica el tránsito entre el mundo real y el matemático como el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuando un o una estudiante resuelve un problema de modelación matemática debe transitar entre estos dos mundos, lo que le permite desarrollar diversas habilidades que generan un aprendizaje más integral. Borromeo-Ferri (2010) presenta diferentes fases que componen el ciclo de modelación: *situación real*, situación planteada en un contexto real; *representación mental de la situación*, involucra simplificaciones de la situación y conocimiento extramatemático del sujeto para reconstruir dicha situación en su mente y empezar a trabajar en ella; *modelo real*, identificado en las representaciones externas del sujeto que ha idealizado y estructurado la situación de forma interna; *modelo matemático*, se genera a partir de un proceso de matematización representado con el uso de expresiones matemáticas, gráficas, relaciones entre variables; *resultados matemáticos*, resultados que se obtienen al utilizar el modelo matemático; y *resultados reales*, resultados matemáticos validados en el contexto real (Figura 1).

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

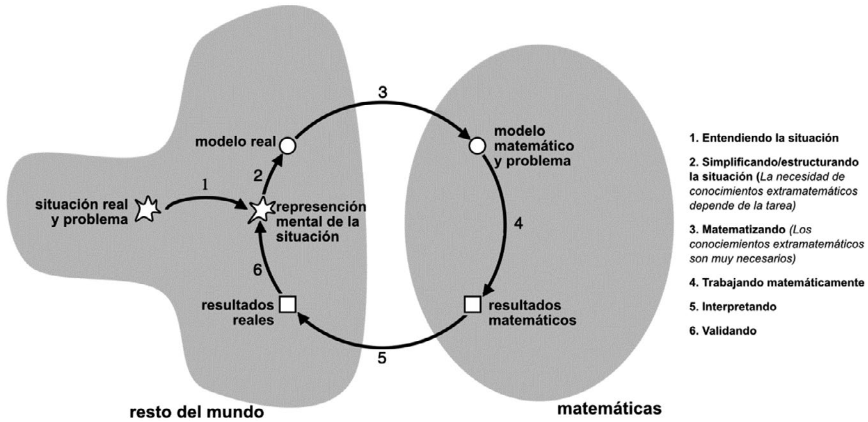


Figura 1. *Ciclo de modelación bajo una perspectiva cognitiva*
Fuente: adaptado y traducido de Borromeo-Ferri (2010, p. 104).

En esta línea, Greefrath y Vorhölter (2016) extendieron el ciclo de modelización de Borromeo-Ferri al incorporar el mundo tecnológico. Las nuevas fases son: modelo computacional, obtenido al configurar en un lenguaje computacional, los aspectos matemáticos del modelo matemático, incorporando simulaciones dinámicas de este modelo, o simulaciones estáticas mediante representaciones geométricas del modelo real. Y resultados computacionales, resultado de estas simulaciones que son interpretados como resultados en el mundo matemático. Estas herramientas no solo permiten una mayor interacción con los modelos, sino que también abren la puerta a debates sobre si la modelación debe entenderse como un fin educativo en sí mismo o como un medio.

En tal sentido, Abassian *et al*. (2020) e Ikeda (2013) manifiestan que estas dos perspectivas sobre la modelación matemática en el contexto educativo generan distintas visiones y teorías sobre como entendemos desde la investigación a la modelación matemática. A grandes rasgos, Kaiser y Sriraman (2006) opinan que una perspectiva educativa vista como un fin, busca desarrollar en el estudiantado habilidades de modelación, en cambio, una perspectiva conceptual trata a la modelación matemática como un medio para posibilitar el aprendizaje de diversos conceptos matemáticos, o busca que cada estudiante genere nuevo conocimiento a partir de ellos.

Dentro de las diversas perspectivas sobre la modelación matemática en educación, figura la perspectiva denominada modelos y modelización que planteó Lesh y Doerr (2003), cuyo fin es buscar que el alumnado entienda la matemática a partir del desarrollo de un problema. El contexto, creado por el profesor, que puede ser real o imaginado, provoca que cada estudiante construya un modelo matemático que le permita manipular la información brindada; esto genera los resultados matemáticos que deben ser interpretados en el contexto inicial. Los problemas propuestos bajo esta perspectiva son diseñados para desarrollar el pensamiento matemático del estudiantado y enseñar conceptos matemáticos específicos, por eso son llamados actividades generadoras de modelos (MEA, por la sigla en inglés de *model-eliciting activities*).

Para el presente estudio se ha propuesto un problema que puede ser considerado semi real, pues abarca un problema real de conexiones para el servicio de telecomunicaciones, tipos de cables, entre otros aspectos; sin embargo, el terreno donde se realizará el cableado es inventado por cada docente. Con este problema se pretende dar sentido a diversos conceptos matemáticos como el teorema de Pitágoras, la medida, las funciones y sus gráficas, las funciones económicas, las rectas tangentes, las derivadas,

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

entre otras nociones; así como utilizar o no las tecnologías digitales.

Del mismo modo, se pretende identificar qué acciones realiza el estudiantado al resolver dicho problema, de modo que se empleen los ciclos de modelización para describir los procesos por donde transita el o la estudiante. Lo anterior da lugar a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo se interpreta el proceso de modelización matemática en un problema de optimización a la luz de los ciclos presentados por Borromeo-Ferri y Greefrath?
- ¿Cuáles similitudes y diferencias aparecen al resolver la misma tarea de modelización con y sin herramientas digitales?

Para responder estar preguntas, se realiza un estudio exploratorio que nos permitirá conocer más sobre el uso de tareas de modelización en la enseñanza del cálculo.

Método de investigación

La presente investigación adopta un enfoque cualitativo de carácter descriptivo, orientado a comprender los procesos que sigue el estudiantado al resolver un problema de modelación matemática. Se busca describir cómo, a partir de sus producciones orales y escritas, interpretaciones, representaciones y acciones, el alumnado construye modelos matemáticos y utiliza herramientas -analógicas o digitales- en el abordaje de una situación contextualizada centrada en una función económica como el costo.

El diseño metodológico corresponde a un estudio de casos múltiples de tipo instrumental. En este, cada caso se estudia a profundidad con el propósito de aportar a la comprensión de un fenómeno más amplio (Stake, 2010; Yin, 2018). Como destacan Hunziker y Blankenagel (2021), esta estrategia permite analizar individualmente cada caso para luego identificar similitudes y diferencias relevantes, lo cual fortalece la construcción de categorías conceptuales y el desarrollo teórico. En este sentido, el estudio se enmarca en una línea de investigación más amplia sobre procesos de modelización matemática en entornos universitarios, particularmente en relación con el uso de tecnologías digitales.

El estudio se llevó a cabo en tres fases: (i) definir y diseñar, lo cual implica reconocer un fenómeno a estudiar, proponer y justificar la elección de un enfoque teórico apropiado y especificar la forma en la que se realizará la recolección de la data; (ii) preparar, recolectar y analizar, que implica el diseño e implementación del caso, la recolección de la información y el análisis de los datos recolectados con el fin de presentar los resultados del estudio; (iii) analizar y concluir, que involucra analizar la información de forma comparativa al considerar los aspectos teóricos y realizar conclusiones de la investigación (Yin, 2018).

En la introducción de este análisis, se presentan trabajos que justifican la realización del estudio, ya sea por la importancia de desarrollar problemas de contexto en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, por las dificultades que persisten al abordar la optimización de funciones, la relevancia de abordar temas matemáticos desde metodologías diferentes, entre otros aspectos (Martínez *et al*., 2023; Mkhatshwa y Doerr, 2018). Esto motivó la realización del estudio, y se planteó como objetivo: analizar comparativamente los procesos de modelización de estudiantes en etapa universitaria al resolver un problema de contexto que involucra la noción de optimización.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

En los aspectos teóricos se considera el ciclo de modelización que permite describir el proceso de resolución que siguen los y las estudiantes, tanto para transitar entre los mundos real y matemático, como cuando involucran tecnologías digitales como herramienta de apoyo. Asimismo, se considera la perspectiva de modelos y modelización, la cual se ajusta con el objetivo del estudio, al tratar de que el estudiantado entienda la matemática a partir del desarrollo de un problema. En este caso, sobre un concepto matemático específico como es la optimización de funciones.

A partir de estas consideraciones, se procedió al diseño del problema y a la selección de los instrumentos de recolección de datos: fichas de trabajo, archivos de GeoGebra y entrevistas semiestructuradas. Las acciones anteriores forman parte de la primera fase del estudio de caso.

Como parte de la segunda etapa del estudio de caso, se seleccionó el trabajo de dos sujetos de investigación y se les realizó una entrevista semiestructurada al finalizar la resolución del problema. Las dos personas estudiantes se seleccionaron de un conjunto de siete personas, por diferentes razones: i. utilizaron tecnologías diferentes, lápiz y papel y GeoGebra; ii. mostraron mayor interés en participar y tenían disponibilidad de tiempo para realizar la entrevista; y iii. de los cinco estudiantes restantes, dos de ellos no presentaron avance alguno porque no reconocieron con qué variable trabajar, y los otros tres tuvieron ciertos impedimentos en sus procedimientos: falta de nociones matemáticas y poco conocimiento de las herramientas de GeoGebra para validar sus modelos, errores al interpretar el contexto del problema, y dificultades al derivar una expresión con radicales. Asimismo, estos avances fueron similares a los presentados en el trabajo de las dos personas estudiantes elegidas. La información recolectada se reporta en la sección de análisis del presente estudio.

Este enfoque de casos múltiples se apoya en una lógica de replicación teórica (Yin, 2018), en la cual los casos se seleccionan estratégicamente por su potencial para mostrar variabilidad significativa en el fenómeno estudiado, más que para representar una muestra estadística. Dicha metodología permite obtener un conocimiento profundo de cada experiencia individual, al tiempo que favorece la identificación de patrones comunes y contrastes conceptualmente relevantes. Como sostienen Hunziker y Blankenagel (2021), el valor de este diseño no radica en la cantidad de casos, sino en la riqueza del análisis comparativo, lo cual contribuye a establecer categorías interpretativas robustas y avanzar en la elaboración de una teoría sustantiva.

En la tercera etapa, se realiza el análisis de datos obtenidos y se presenta la discusión sobre estos, alineados con el objetivo del presente estudio. Para ello, en las respuestas de cada estudiante se identificaron elementos asociados con cada una de las etapas y procesos especificados en el ciclo de modelización, comparando las diferentes maneras de abordar el problema. Se presentan conclusiones generales sobre el estudio realizado, relacionadas con el uso de tecnologías digitales y la modelización matemática. Estas acciones forman parte de la fase tres del estudio de casos.

Sujetos de investigación

Se trabajó con dos estudiantes de 17 años de segundo ciclo de la carrera de Administración de una universidad de Lima-Perú, quienes se matricularon en el curso de Cálculo del primer semestre del

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

2022. A estas personas las llamaremos Jaime y Camila. Como antecedentes académicos, ambas recibieron clases sobre funciones, límites y derivadas; en relación con este último se enseñó la derivada como la pendiente de una recta tangente, como razón de cambio instantánea hasta el criterio de la primera derivada para la monotonía de funciones, tema previo al trabajo de cálculo de valores extremos de una función y optimización de funciones.

Asimismo, a lo largo de las clases una persona docente/investigadora utilizó GeoGebra para representar gráficamente diversas funciones, crear puntos en el plano y ubicar puntos sobre las gráficas, crear deslizadores, trazar rectas tangentes, entre otras acciones, con ello se genera una cercanía con el uso de GeoGebra para la resolución de ejercicios y comprobación de resultados.

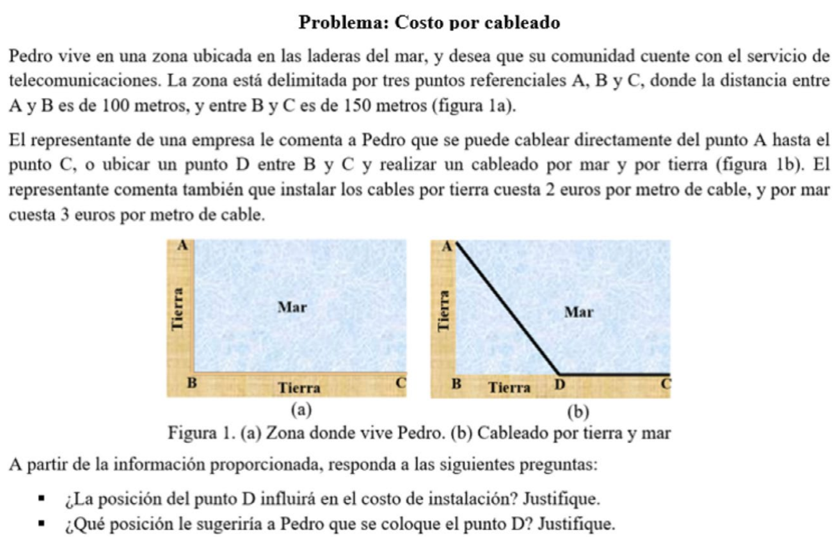
Protocolo de recogida de datos

Los datos fueron recolectados durante dos clases del curso Cálculo, la cual se dictó en la modalidad en línea (virtual) en el primer semestre del 2022. Los instrumentos de recolección de datos fueron: i) fichas de trabajo en Word, ii) archivos de GeoGebra y iii) entrevistas semiestructuradas. Durante la clase, cada estudiante presentó sus respuestas en las fichas de trabajo, redactaron su respuesta directamente en el archivo en Word, desarrollaron el problema en hojas aparte, le tomaron fotografías o lo pegaron en dicho archivo; quienes emplearon GeoGebra, tomaron capturas de pantalla de la interfaz para justificar su avance y lo anexaron en el archivo en Word, pero también subían a la plataforma los archivos en GeoGebra donde habían trabajado. Los archivos con sus procedimientos fueron guardados en el aula virtual del curso al finalizar el problema propuesto.

Las entrevistas se realizaron al finalizar la resolución del problema, y luego de que hayan subido al aula virtual sus respuestas. Estas tuvieron la finalidad de poder entender de manera más clara los procedimientos realizados al resolver el problema planteado, así como su forma de razonar.

El problema: costo por cableado

La Figura 2 expone el problema propuesto a el grupo de estudiantes. Podían utilizar lápiz y papel para resolver el problema o hacer uso de enlaces que los llevaban a interfaces de GeoGebra para apoyarse en la tecnología en su resolución. Estos enlaces fueron empleados en distintos momentos previo a la parte experimental del estudio.


Problema: Costo por cableado

Pedro vive en una zona ubicada en las laderas del mar, y desea que su comunidad cuente con el servicio de telecomunicaciones. La zona está delimitada por tres puntos referenciales A, B y C, donde la distancia entre A y B es de 100 metros, y entre B y C es de 150 metros (figura 1a).

El representante de una empresa le comenta a Pedro que se puede cablear directamente del punto A hasta el punto C, o ubicar un punto D entre B y C y realizar un cableado por mar y por tierra (figura 1b). El representante comenta también que instalar los cables por tierra cuesta 2 euros por metro de cable, y por mar cuesta 3 euros por metro de cable.

Figura 1. (a) Zona donde vive Pedro. (b) Cableado por tierra y mar

A partir de la información proporcionada, responda a las siguientes preguntas:

- ¿La posición del punto D influirá en el costo de instalación? Justifique.
- ¿Qué posición le sugeriría a Pedro que se coloque el punto D? Justifique.

Figura 2. *Problema propuesto sobre la optimización de una función económica*
Fuente: propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

El problema propuesto busca que el estudiantado realice un proceso de modelización de una función costo por el cableado, a partir de los datos brindados. La idea es identificar la posición del punto D, sobre el segmento BC, para el cual el costo sea mínimo. Para ello, se espera que cada estudiante asigne las variables para representar la situación y determine el costo por el cableado.

Resultados y análisis

Se describen los procesos de resolución utilizados por Jaime y Camila al abordar el problema propuesto, y se identifican los ciclos de modelización de cada uno de ellos. Asimismo, se presenta parte de los procedimientos de resolución y respuestas dados por tres estudiantes que participaron de la parte experimental, a quienes llamaremos Ana, Carlos y Pedro, donde se presentan las dificultades y errores identificados en el desarrollo del problema.

El caso de Jaime

El contexto del problema se le presentó a Jaime mediante un texto que mostraba la información sobre dimensiones del lugar donde se ubica la comunidad, en las laderas del mar, y de costos por los cables que se deben comprar para realizar el cableado para la red de telecomunicaciones; así como información gráfica para que se oriente en sus construcciones (Figura 2).

Jaime trasladó la información textual sobre medidas, costos y restricciones hacia las imágenes mostradas en el problema, como una manera de simplificar la información brindada con el fin de comprender el problema teniendo los datos numéricos y gráficos juntos. Por otro lado, asignar una letra k sobre el segmento DC y la expresión $150 - k$ sobre el segmento BD, se puede entender como una manera inicial de abordar el problema, donde el estudiante reconoce que el punto D puede variar sobre el segmento BC. Estas anotaciones realizadas sobre las imágenes, representan la manera en que cada estudiante simplifica la situación que se está modelando, el asignar símbolos a las distancias entre los puntos B y D, y los puntos D y C, se puede interpretar que Jaime piensa que el punto D va a variar (Figura 3).

Jaime movilizó sus conocimientos intramatemáticos sobre el teorema de Pitágoras para determinar la medida de los cables por mar y por tierra, para dos posiciones diferentes del punto D: i) cuando el punto D coincide con el punto C; es decir, el cableado es solo por mar y la distancia BD es igual

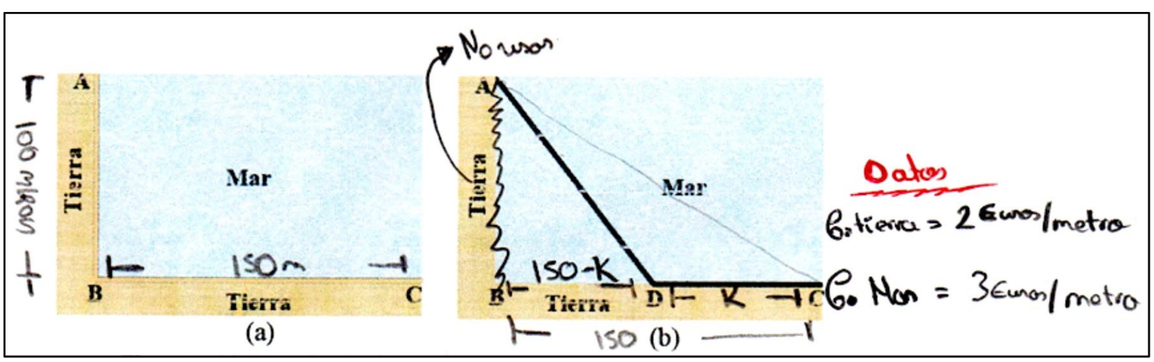


Figura 3. *Problema propuesto sobre la optimización de una función económica*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

a 150, y ii) cuando el punto D se ubica a 90 metros del punto B, al realizar un cableado por mar y por tierra; estas acciones son indicadores de que Jaime es consciente de que, para hallar el costo por el cableado, debe hallar primero las medidas de los cables.

Por otro lado, Jaime utilizó sus conocimientos extramatemáticos para encontrar el costo total por el cableado, a partir de información de los costos por metro del cable por mar y tierra (Figura 4). Jaime moviliza sus conocimientos previos a nivel cognitivo y los hace visibles a partir de representaciones gráficas (triángulos rectángulos), simbólicas (teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$) y numéricas (medida de los cables y costos), lo cual evidencia una comprensión de la situación que implica reconocer que el costo por el cableado varía según la posición del punto D, e identificar una manera de hallar dicho costo a partir de un contexto numérico.

Esto le permitió a Jaime afirmar que la posición del punto D influye en el costo por el cableado, al colocar en su respuesta escrita: *la posición del punto D influye directamente en el costo, cuando A-D disminuye, el costo disminuye*.

El reconocimiento de la variación conjunta entre la posición del punto D y el costo por el cableado, hizo que Jaime pensara en proponer una función que los relacione. Para ello, definió $C(D)$ como una variable que modela el costo por el cableado, que depende de la distancia del punto D al punto B (simbolizado por la letra D) (Figura 5).

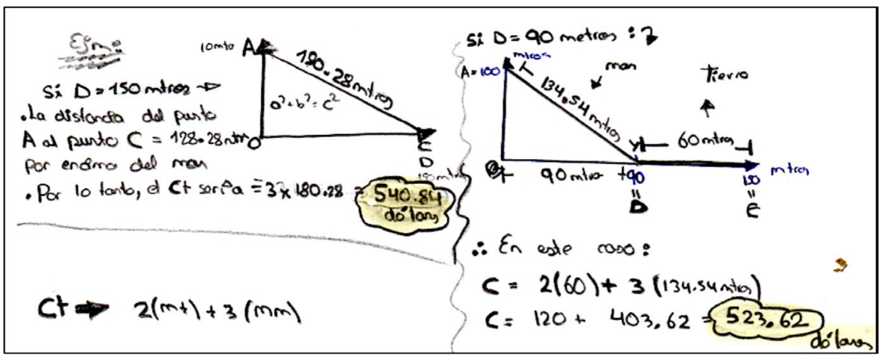


Figura 4. *Cálculo de distancias y costos asociados con la situación real planteada*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

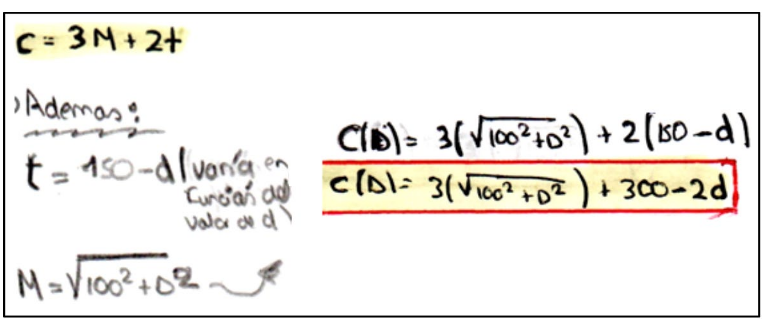


Figura 5. *Expresión matemática del costo por el cableado en el trabajo de Jaime*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

Con la intención de conocer por qué el estudiante pensó en construir una función, se generó el siguiente diálogo en la entrevista semiestructurada:

01 Investigador: ¿Qué te hizo pensar en construir una función?

02 Jaime: por los cambios en el costo. Cuando puse D en el extremo, me salió un costo de 540, luego, lo puse a 90 metros de B y el costo disminuyó. No sabía si iba a seguir disminuyendo o iba a aumentar. Por eso halle la función.

03 Investigador: ¿por qué utilizaste las variables D mayúscula y d minúscula en tu expresión?

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

04 Jaime: quise trabajar los cables por separado, y asigné letras distintas, luego me di cuenta que eran iguales.

05 Investigador: ¿de qué manera utilizarás la función que has construido?

06 Jaime: pienso aplicar el criterio de primera derivada, porque no sé dónde está el costo mínimo. Si fuera cuadrática hallaría el vértice, pero es una función con raíz.

La expresión matemática construida por Jaime, que modela el costo por el cableado en función de la distancia del punto D al punto B, cumple dos funciones: por un lado, matematiza la situación al construir un modelo general que brinda el costo para cualquier posición del punto D; pero, por otro lado, es la base para aplicar estrategias de cálculo para optimizar funciones, como es el caso del criterio de la primera derivada, mencionado por el estudiante.

Jaime mostró habilidades matemáticas relacionadas con el uso del criterio de la primera derivada para la optimización de funciones. Halló la función derivada del costo mediante el uso de técnicas de derivación como la derivada de una constante y de funciones polinómicas, así como la derivada de potencias, igualó a 0 dicha derivada, resolvió una ecuación irracional para obtener el valor crítico y analizó el signo de las derivadas para justificar que en el valor crítico la función costo por el cableado presenta un mínimo absoluto (Figura 6).

Como se aprecia en la Figura 6, el procedimiento matemático que realizó el estudiante está compuesto por operaciones matemáticas, signos, evaluaciones y representaciones gráficas de flechas, propias del uso de un criterio con derivadas para analizar la monotonía de la función y su valor extremo. La persona investigadora le hizo algunas preguntas al estudiante para identificar su nivel de comprensión del criterio utilizado:

07 Investigador: ¿por qué afirmas que en el valor 89 hay un mínimo absoluto?

08 Jaime: porque la derivada es negativa a la izquierda de 89 y positiva a la derecha. Según el criterio la función tiene un mínimo.

09 Investigador: ¿qué interpretación de das a las flechas que dibujaste?

10 Jaime: que si la derivada es negativa la función decrece y si es positiva, crece.

Jaime brinda una interpretación de sus resultados manteniéndose en todo momento en el campo matemático, dado que, en sus

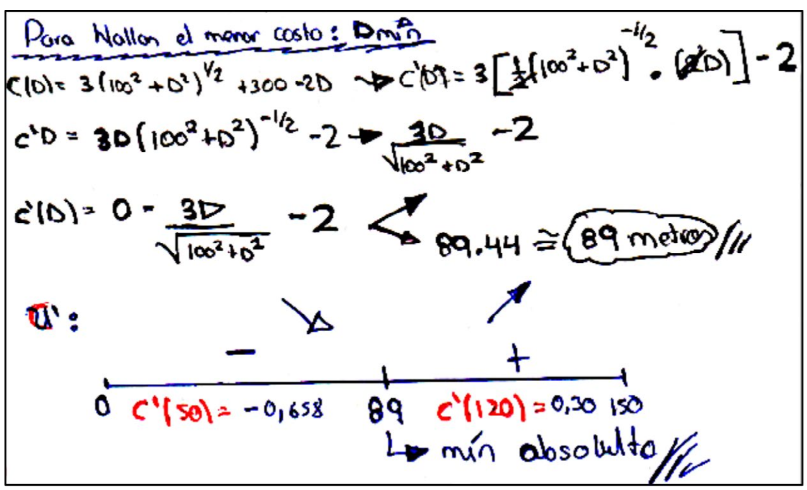


Figura 6. *Criterio de la primera derivada para optimizar una función*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

palabras, no asigna el valor 89 a la distancia en metros entre los puntos B y D, y tampoco menciona que la función modela el costo por el cableado o que se deriva de dicha función; el estudiante simplemente expresa términos matemáticos como función, derivada, función creciente o decreciente, derivada positiva o negativa.

Por último, Jaime respondió a la segunda pregunta como sigue: *El valor de D que minimiza los costos es 89 metros. El costo mínimo es 523.61 euros.* El estudiante interpreta los resultados obtenidos luego de haber aplicado el criterio de la primera derivada, dentro de la situación planteada en el problema, regresando con ello al contexto real de la situación.

Proceso de modelización que desarrolló Jaime

Se observan diferentes procesos en el trabajo de Jaime: interpretación del contexto, simplificación de los datos, cálculos de distancias y costos para casos particulares en donde intervinieron conocimientos previos del estudiante sobre aspectos de la realidad, matematización de la situación, puesta en juego de habilidades matemáticas, obtención de resultados e interpretaciones matemáticas de estos asociados con la optimización de funciones mediante el criterio de la primera derivada y, finalmente, interpretación de estos resultados en el contexto real. Estos procesos pueden ser explicados desde la perspectiva teórica del ciclo de modelización de Borromeo-Ferri (2010) (Figura 7).

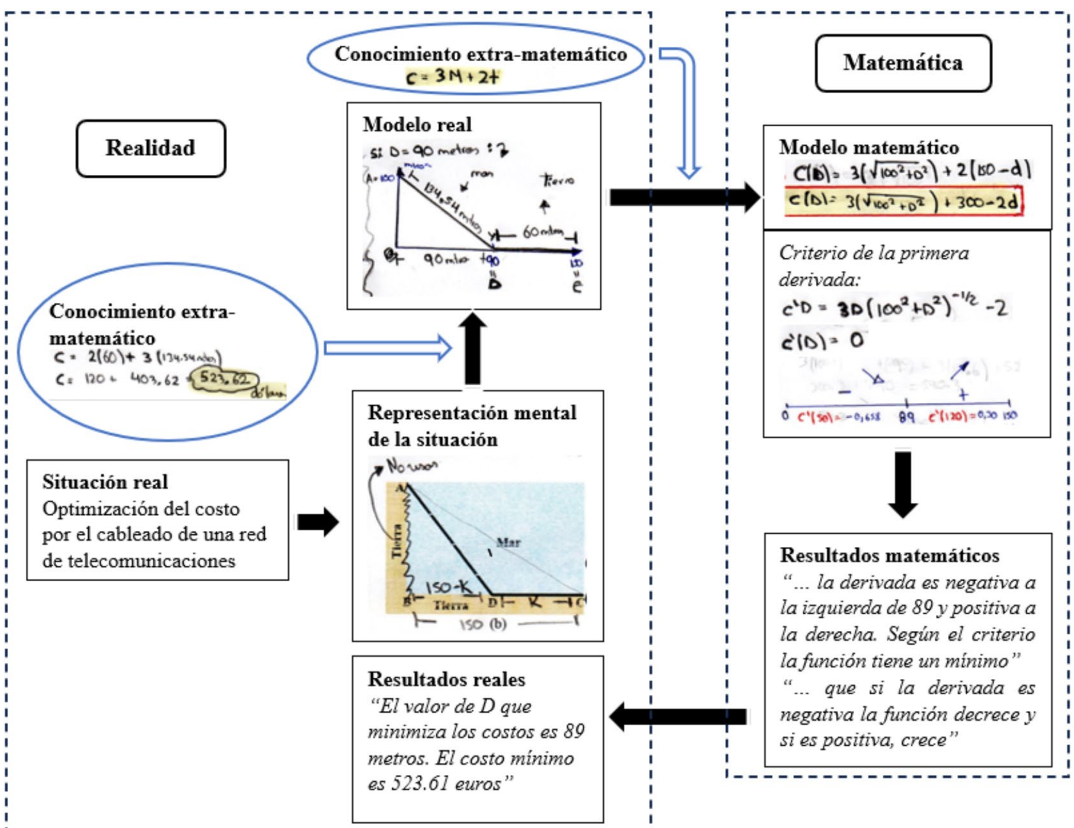


Figura 7. *Ciclo de modelización que realizó Jaime*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

El caso de Camila

A Camila se le presentó el mismo problema que trabajó Jaime, el cual involucraba una situación de contexto real (Figura 1). La estudiante decidió recrear la situación en GeoGebra, porque reconoció que necesitaba variar un punto y con él todo el sistema de cableado. Construyó los puntos A, B y C a partir de la información dada textualmente, al escribir en la barra de entrada el punto (0, 100) que corresponde a A, luego (0, 0) para B y (150, 0) para C. A continuación, creó un deslizador simbolizado con *a* que tomaba el número 1 como valor inicial, 150 como valor final e incrementos de una unidad, y con él creó el punto D al escribir en la barra de entrada (*a*, 0). Por último, trazó los segmentos AD y DC (Figura 8).

Con el objetivo de indagar acerca de la razón de utilizar GeoGebra, se dio el siguiente diálogo entre la persona investigadora y la estudiante:

> 11 Investigador: ¿por qué decidiste utilizar GeoGebra?

> 12 Camila: porque en el problema se pide encontrar un punto D que puede tener muchas posiciones, y en cada posición cambia el cableado. Por eso construí un deslizador para mover el punto D.

> 13 Investigador: ¿cómo configuraste el deslizador?

> 14: Camila: puse como valor inicial 1 porque no se podía cablear en AB, y valor final 150, que es hasta dónde puede llegar D.

Esta construcción nos indica que Camila reconoce, por un lado, que la posición del punto D varía y con eso la forma del cableado; asimismo, el diseño del deslizador con valor inicial 1 significa que es consciente de que no se puede realizar el cableado en la franja delimitada por los puntos A y B.

La estudiante contaba con las medidas de los segmentos dibujados, las cuales fueron simbolizadas por GeoGebra con las letras *f* y *g*. A partir de ellas, Camila halló el costo por el cableado, simbolizado en la vista algebraica con la letra *b* (Figura 8), al escribir en la barra de entrada: $3f+2g$. Esta acción evidencia que la estudiante utilizó GeoGebra para encontrar de forma dinámica diferentes costos para un conjunto discreto de posiciones del punto D, todas ellas separadas por un metro, según la configuración del deslizador.

Camila presentó en el archivo en Word del problema, cómo construyó la expresión que modela el costo por el cableado $C(d)$, considerando como variable el símbolo d que representa la distancia del punto D al punto B (Figura 9).

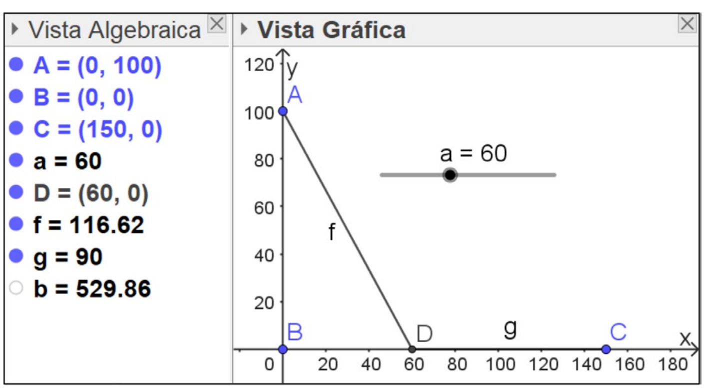


Figura 8. *Cambios dinámicos en la forma del cableado en el trabajo de Camila*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

Tenemos las ecuaciones:

- Tierra (T)=150- distancia de B a C (d). Es decir: T = 150-d
- Mar (M)= $\sqrt{100^2 + d^2}$ Es decir: $M = \sqrt{100^2 + d^2}$
- Costo (C) = 2T + 3M. Es decir: $C(d) = 300 - 2d + 3\sqrt{100^2 + d^2}$

Figura 9. *Matematización del costo por cableado en el trabajo de Camila*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

La estudiante reconoció que era posible modelar los cambios generados en el costo al variar la posición del punto D con el deslizador, mediante una expresión matemática creada a partir de la adición de una expresión lineal con una expresión con radicales, la cual le brindaría el costo por el cableado para cualquier posición del punto D.

Luego de matematizar la situación, al realizar el tránsito de un contexto económico a uno matemático, Camila se vio en la necesidad de representar gráficamente la expresión matemática construida, para ello, abrió una vista gráfica 2 de GeoGebra y escribió en la barra la instrucción: *función* ($300 - 2x + 3\sqrt{100^2 + x^2}$, 1, 150), con la cual se generó la gráfica de una función *h*. Esta fue utilizada por la estudiante para analizar el comportamiento del costo por el cableado, en función de la posición del punto D (distancia del punto D al punto B).

Seguidamente, la estudiante ubicó un punto E sobre la gráfica, ejecutado con la herramienta *punto* de GeoGebra; trazó una recta tangente a la gráfica del costo en dicho punto con la herramienta *tangentes*, halló la pendiente de la recta tangente con la herramienta *pendiente* de GeoGebra, y movilizó el punto E hasta que la recta tangente se volvió horizontal (Figura 10).

Con el propósito de entender las acciones que Camila realizó con GeoGebra, la persona investigadora realizó algunas preguntas a la estudiante:

15 Investigador: ¿por qué decidiste construir una expresión algebraica para modelar el costo?

16 Camila: porque el costo venía decreciendo hasta a = 89, donde el costo salió 523,61, en a = 90 salió el mismo costo, y para valores mayores el costo

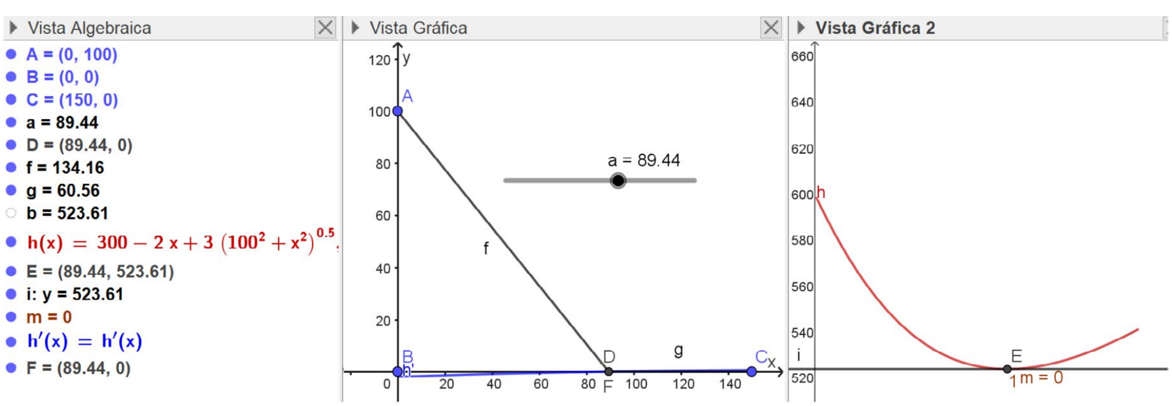


Figura 10. *Función de costo por cableado en GeoGebra en el trabajo de Camila*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

aumentaba. Entonces había una posición entre 89 y 90. Con la función quería trazar una recta tangente horizontal y ver en qué valor de *x* ocurría.

17 Investigador: ¿cómo construiste la recta tangente y qué información te dio?

18 Camila: ubiqué un punto E sobre la gráfica de *h*, que lo hice con el deslizador para poder moverlo; luego, usé las herramientas tangente y pendiente de GeoGebra. Cuando la pendiente es negativa la función baja, luego cuando es positiva sube, entonces cuando está abajo, la pendiente es 0, allí está el mínimo.

19 Investigador: ¿qué representan la gráfica de color azul en la vista gráfica 1 y el punto F? ¿por qué los hallaste?

20 Camila: es la derivada de *h* y el punto F es donde se hace 0. Lo que pasa es que tuve que cambiar el incremento del deslizador, estaba en 1 y lo puse en 0,1, y me di cuenta que la pendiente era 0 para diferentes valores entre 89,1 y 89,8, luego lo cambié a 0,01 y no cambió mucho. Hallé la derivada para igualarlo a 0 y hallar el punto crítico que me salió 89,44.

Los resultados que muestra GeoGebra, luego de las acciones de Camila sobre él, se traducen en la gráfica continua de la expresión matemática que modela el costo por el cableado en función de la distancia entre los puntos B y D, la gráfica de una recta tangente a dicha gráfica en un punto E de tangencia, las coordenadas del punto E y la pendiente de esta recta. Estos objetos matemáticos mostrados en la vista gráfica 2 de GeoGebra, le permitieron a Camila explicar matemáticamente la situación, en términos de la monotonía de la función y su relación con la pendiente de la recta tangente (línea 18); gracias a la visualización que brinda GeoGebra.

Por otro lado, la complejidad para hallar un único valor exacto de *x* donde la pendiente de la recta tangente sea igual a 0, hizo que Camila realizara un proceso de aproximación considerando hasta 2 decimales para el valor de *x*, manipulado por el deslizador. Esto la llevó a utilizar las herramientas derivada y raíces de GeoGebra, para encontrar dicho valor crítico.

Por último, Camila respondió a la segunda pregunta como sigue: *El costo mínimo sería de 523.61 euros, y ocurre cuando D está a 89,44 metros del punto B*. La estudiante no se percató de que el costo resultó ser el mismo valor cuando el punto D se ubicaba a 89, 89, 44 y 90 metros del punto B, debido a que GeoGebra estuvo configurado para que mostrara los valores con dos cifras decimales; sin embargo, Camila interpreta las coordenadas del punto E (89.44, 523.61) dentro del contexto real planteado en el problema, dado que incluyó en su respuesta los valores numéricos con sus respectivas unidades.

Proceso de modelización que desarrolló Camila

Se observan diferentes procesos en el trabajo de Camila: interpretación del contexto, recreación en GeoGebra del cableado que conecta el punto A con el punto C mediante un punto D, variación conjunta del costo por el cableado y de la posición del punto D mediante un deslizador, matematización de la situación, representación gráfica y algebraica de la expresión que modela el costo en GeoGebra y simulación en GeoGebra del criterio de la primera derivada para la optimización de funciones, obtención de resultados de GeoGebra que fueron interpretados

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

matemáticamente, y, por último, interpretación de estos resultados en el contexto real. Estos procesos pueden ser explicados desde la perspectiva teórica del ciclo de modelización de Greefrath (2011) (Figura 11).

Otros procedimientos y resultados

La recolección de los datos que brindaron las personas estudiantes permitió observar procedimientos similares a los dos ya reportados: uso del teorema de Pitágoras, construcción de una función de costo, uso de GeoGebra como apoyo gráfico y simulación de posibles posiciones del punto D. Sin embargo, no se aprecia la construcción de un modelo matemático o uno computacional, que justifiquen los resultados obtenidos por cada estudiante, y tampoco un proceso de validación de estos, no completando con ello el ciclo de modelización.

Acontinuación se presenta una breve descripción de lo observado por tres de los cinco estudiantes restantes, a quienes llamaremos: Ana, Carlos y Pedro, pues dos de los que participaron no presentaron ninguna solución.

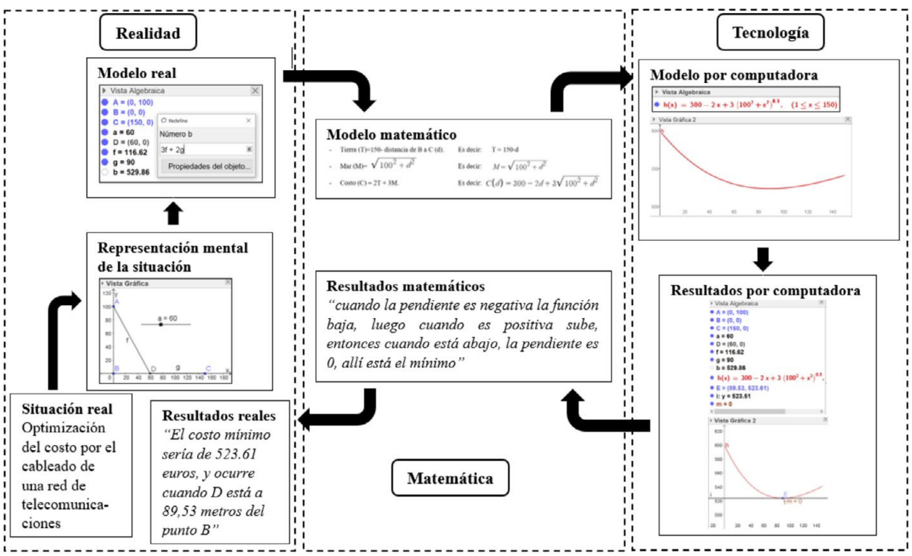


Figura 11. *Ciclo de modelización que realizó Camila*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

Ana realizó un procedimiento aritmético que consistió en ubicar el punto D en nueve sitios diferentes, y para cada uno de ellos hallar la medida de los cables por mar y por tierra, y luego el costo del cableado. Luego, creó en GeoGebra nueve puntos con estos resultados con la forma: (distancia BD, costo del cableado). Por último, a partir de la posición de los puntos D y E del gráfico, estimó que el costo mínimo se da cuando el punto D se ubica a 90 metros del punto B (Figura 12).

Ubicación del punto D (BD)	Cableado por el mar	Cableado en tierra	Costo del cableado en euros
10	$\sqrt{100^2+10^2}=100.5$	140	581.5
20	$\sqrt{100^2+20^2}=101.98$	130	565.94
50	$\sqrt{100^2+50^2}=111.8$	100	535.4
80	$\sqrt{100^2+80^2}=128.06$	70	524.18
100	$\sqrt{100^2+100^2}=141.42$	50	524.26
120	$\sqrt{100^2+120^2}=156.2$	30	528.6
140	$\sqrt{100^2+140^2}=172.05$	10	536.15
148	$\sqrt{100^2+148^2}=178.62$	2	539.86
150	$\sqrt{100^2+150^2}=178.62$	0	540.84

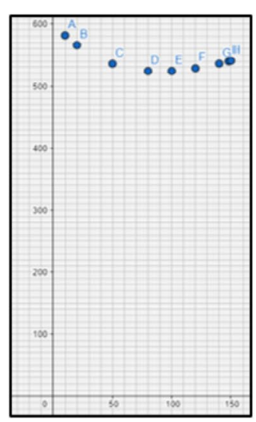


Figura 12. *Proceso de resolución realizado por Ana*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

El estudiante Carlos utilizó solo lápiz y papel. Ubicó el punto D en cinco posiciones diferentes con respecto del punto B: 30, 60, 90, 120 y 150 metros, luego halló las medidas de los cables por mar y tierra y sus respectivos costos, de forma similar a lo hecho por Jaime y Ana. La diferencia observada con lo hecho por Jaime es en la elección de las variables. Carlos asigna *x* a la medida de cableado por tierra e *y* a la medida del cableado por mar, con ellos determina la función de costo en términos de *x*. Reconoce que debe derivar la función para obtener el valor crítico y hallar el mínimo costo, pero no deriva correctamente la función y, producto de ello, obtiene valores negativos de *x* (Figura 13), esto lo lleva a no saber qué concluir en relación con el proceso de optimización.

Por último, el estudiante Pedro, así como Camila, diseñó un deslizador en GeoGebra con incrementos de 30 metros para mover el punto D, construyó con segmentos el cableado por mar y por tierra, que variaba conforme manipulaba el deslizador (no consideró un cable que fuera directamente de A hacia C). Al momento de hallar los costos por el cableado, consideró por error que el segmento AD era el cableado por tierra, y el segmento DC el cableado por mar (Figura 14), lo cual se contradice con la información gráfica expuesta en el problema. Esto hizo que obtuviera costos decrecientes y concluyera que el costo mínimo de instalación es de 402,4 euros, con lo cual se ocultan procesos de optimización que se espera realice.

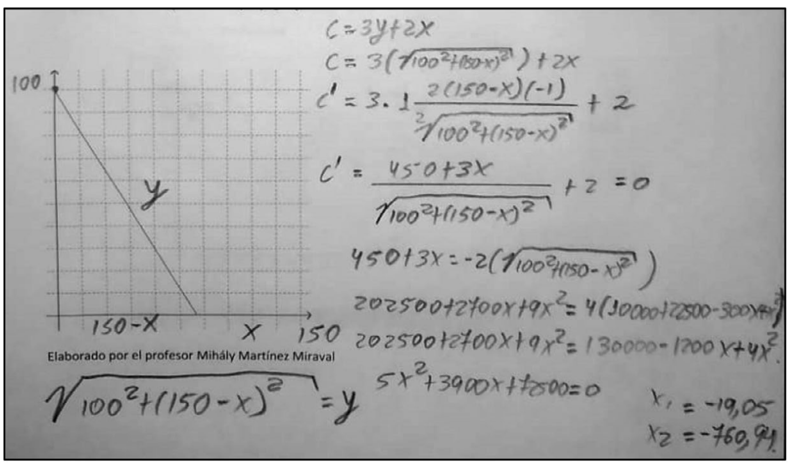
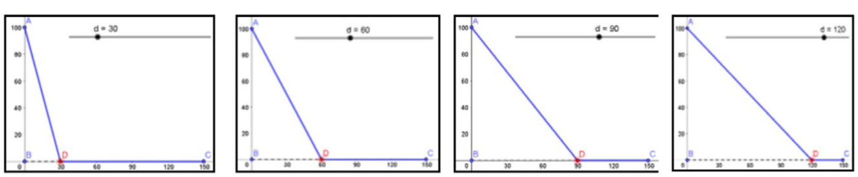


Figura 13. *Proceso de resolución que realizó Carlos*
Fuente: elaboración propia de la investigación.



CABLEADO POR TIERRA :	CABLEADO POR MAR:	
De A a D (100 ,30) 104.40 x 2 = 208.8	DE D a C (30 ; 150) = 120 x3= 360	568.8
DE A a D (100 ; 60) = 116.62 x 2 = 233.24	DE D a C (60 ; 150) = 90 x 3 = 270	503.24
DE A a D (100 ; 90) = 134.53 x2 = 269.06	DE D a C (90; 150) = 60 x3 =180	449.9
DE A a D (100 ; 120) = 156.20 x2 = 312.4	DE D a C (120 ; 150) = 30 x 3 = 90	402.4

Figura 14. *Proceso de resolución que realizó Pedro*
Fuente: elaboración propia de la investigación.

Discusión

Los procesos de resolución realizados por Ana, Carlos y Pedro muestran similitudes en el plano aritmético, pues en la búsqueda de reconocer si el costo por el cableado varía al mover el punto D, los tres estudiantes emplearon correctamente el teorema de Pitágoras y la medida de intervalos para justificarlo; sin embargo, se hizo visible la ausencia de conexiones entre los otros campos de la matemática

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

como el algebraico, geométrico y variacional, los cuales pudieron ser integrados mediante el uso de GeoGebra. Ni Ana ni Pedro asignaron una variable a la distancia del punto D al punto B, que les permitiera representar el costo por el cableado de forma algebraica y gráfica en GeoGebra para su posterior análisis; así como Carlos, que presentó dificultades al derivar una función, en lugar de hacerlo con las herramientas de GeoGebra y validar su modelo.

Los resultados obtenidos evidencian un pensamiento estático de la matemática que se hizo visible en GeoGebra, al ubicar puntos en el plano en el caso de Ana, o al realizar una simulación del cableado con un deslizador, para hallar la medida de dos segmentos en cuatro posiciones diferentes en el caso de Carlos, para lo cual se pudo utilizar la calculadora; esto aporta a lo que mencionan Barajas *et al*. (2018), en el sentido de que, si en el aula de clase no se promueve la integración de diferentes campos de la matemática, se puede estar limitando el desarrollo de un pensamiento dinámico de la matemática en sus estudiantes, así como el desarrollo conceptual que puede ser más sólido si se genera tal integración.

Los procesos de resolución de Camila evidencian que las fases de modelación no se presentan de forma lineal. La simplificación de la información dada en un contexto real fue realizada por la estudiante con GeoGebra, esto debido a la concepción de variación que primó en ella, al reconocer las diferentes formas de realizar el cableado variando un punto sobre la región limitada por los puntos B y C, aspecto considerado fundamental para empezar a desarrollar el problema.

En este sentido, nuestros resultados se alinean con los de Maaß (2006), para quien las fases descritas en el ciclo de modelización no necesariamente se dan de forma secuencial; es decir, no siempre se empieza realizando un proceso de simplificación y estructuración en el mundo real para llegar a un modelo real. Este dependerá de cómo el sujeto interpreta y analiza el problema.

La construcción del modelo real en ambos casos necesitó del reconocimiento del producto entre el costo por metro de cable y la longitud de cable necesario para realiza el cableado por mar y tierra. En el caso de Jaime, se llevó a cabo una simplificación del proceso de construcción del modelo real al hallar los valores del costo por el cableado en función de una sola variable que es la distancia del punto D al punto B. En contraposición a esto, Camila utilizó GeoGebra y halló el costo por cableado en función de dos variables representadas por las longitudes de los cables por mar y tierra simbolizadas por f y g, respectivamente. El dinamismo de GeoGebra le permitió a Camila realizar con rapidez una primera aproximación al costo mínimo por cableado, utilizando un deslizador; a diferencia de lo hecho por Jaime a lápiz y papel. Estamos de acuerdo con Zengin (2018) y Blum (2015), con que GeoGebra genera un entorno de aprendizaje dinámico, interactivo y visual, mediante el uso de herramientas como el arrastre o los deslizadores; y que, al realizar simulaciones y cálculos inmediatos, se pueden considerar a las tecnologías digitales como herramientas potentes en la modelización matemática.

La construcción del modelo matemático es común para ambos estudiantes, pues consideraron como variables: la distancia del punto D al punto B y el costo por el cableado, con esto se desarrollan habilidades relacionadas con la creación de dicho modelo. Jaime desarrolló habilidades dentro del campo de las matemáticas, en particular en los campos algebraico y numérico, relacionados con la

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

búsqueda del valor mínimo de una función, para esto se aplican conceptos matemáticos como técnicas de derivación, función derivada, valor crítico, criterio de la primera derivada (línea 8), entre otros, sustentando a lápiz y papel sus resultados.

A partir de esta evidencia, contribuimos a la afirmación de Mkhatshwa y Doerr (2018), de que si bien en la enseñanza del cálculo prima el campo algebraico sobre el geométrico, donde los procedimientos realizados dan la apariencia de ser estáticos, cuando introducimos tareas de modelización, se realizan procesos de interpretación, construcción, justificación y se puede reconocer, a partir de preguntas específicas, que cada estudiante es consciente de los fenómenos de cambio que involucra el problema (líneas 2 y 10).

Por otro lado, Camila desarrolló habilidades dentro del campo tecnológico al movilizar con las herramientas de GeoGebra los conceptos matemáticos de función, punto, recta tangente, pendiente como la derivada de la función en un punto y criterio de la primera derivada. Al utilizar las herramientas: deslizador, punto, recta, tangentes y pendiente, el trabajo se enfocó en los campos geométrico, numérico y variacional. El uso de GeoGebra le permitió a Camila "poner en juego" nociones de variación (línea 12), monotonía (línea 16), covariación y aproximación (líneas 18 y 20).

Coincidimos con lo expresado por Thompson y Dreyfus (2016), quienes señalan la importancia de trabajar temas de cálculo como procesos dinámicos; de modo que, al surgir situaciones de variación y covariación, el aprendizaje de estos temas es más integral.

Si bien la tarea propuesta se centra en la noción de optimización, el contexto de la tarea y la información dada de forma textual, gráfica y numérica, influyeron en la interpretación de los estudiantes. Esto les permitió identificar posibles variables y operar con datos en unidades familiares para ellos, como el euro por metro. Además, los y las estudiantes utilizaron la función económica de costo y movilizaron conocimientos previos, como el teorema de Pitágoras para calcular de la longitud del cable por mar. Con esto, se apoyaron en la matemática para resolver un problema real, como es llevar la tecnología a zonas carentes de servicio de telecomunicaciones, justificando sus respuestas de forma coherente a partir de criterios propios del cálculo diferencial. En este sentido, coincidimos con Villa-Ochoa *et al*. (2017), cuando clasifican a este tipo de tarea de modelización como del tipo enunciado verbal y lo consideran como un recurso importante para conectar a las matemáticas con una realidad evocada o imaginada por quien la construye.

En resumen, los resultados obtenidos evidencian cómo las tecnologías digitales, como GeoGebra y los enfoques más tradicionales, como el uso de lápiz y papel, influyen de manera significativa en el proceso de modelización matemática. Las diferencias en los enfoques que adoptan los y las estudiantes resaltan la importancia de integrar herramientas tecnológicas en la enseñanza del cálculo, pues estas permiten una interacción más dinámica y visual con los conceptos matemáticos, al favorecer un enfoque más integral del aprendizaje. Además, tanto el desarrollo de habilidades algebraicas como geométricas y tecnológicas son fundamentales para abordar problemas de optimización en contextos reales.

A continuación, se presentarán las conclusiones de este estudio, donde se profundizará en las implicaciones educativas de los hallazgos y se propondrán

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

posibles líneas de acción para mejorar la enseñanza de la modelización matemática en entornos universitarios.

Conclusiones

El estudio permitió explorar, desde un enfoque cualitativo, cómo estudiantes en etapa universitaria abordan la resolución de un problema de optimización a través de procesos de modelización matemática. A partir del análisis de dos casos contrastantes, se observaron formas diversas de transitar entre los mundos real, matemático y computacional, así como diferentes estrategias de validación y representación del problema. Estos hallazgos ofrecen una primera aproximación comprensiva al fenómeno, que resulta valiosa dentro de una línea de investigación más amplia sobre la enseñanza del cálculo y la integración de tecnologías digitales.

Interpretación del proceso de modelización "a la luz" de los ciclos de Borromeo-Ferri y Greefrath

Los ciclos de modelización que proponen Borromeo-Ferri y Greefrath brindaron un marco adecuado para describir y analizar los procedimientos seguidos por el estudiantado durante la resolución de la tarea. En los casos analizados, se identificaron etapas como la comprensión del contexto, la formulación del modelo, la resolución matemática y la validación, aunque con distintos niveles de completitud y fluidez según el caso. Esta estructura permitió hacer visible cómo los y las estudiantes organizaron su pensamiento matemático, seleccionaron variables, construyeron expresiones y evaluaron sus resultados en relación con el problema planteado.

El uso de este marco teórico permitió descomponer el proceso de modelización en elementos observables, con lo cual se facilitó la identificación de aciertos, obstáculos y decisiones estratégicas en cada caso. En particular, se destacó el papel de la validación como etapa crítica, donde ambos estudiantes pusieron en juego formas distintas de justificación en función de los recursos utilizados. Estos hallazgos aportan a la teoría al confirmar la utilidad del enfoque cíclico para describir trayectorias de modelización en contextos reales, y a la práctica docente al proporcionar un esquema analítico que puede ser usado para diseñar tareas e instrumentos de evaluación más alineados con los procesos efectivamente desplegados por los estudiantes.

Similitudes y diferencias en la modelización con y sin herramientas digitales

El análisis comparativo entre los dos casos mostró diferencias significativas en los procedimientos y representaciones utilizadas por el estudiantado, asociadas al uso de tecnologías digitales. El estudiante que trabajó con lápiz y papel priorizó procedimientos algebraicos y validaciones basadas en el cálculo manual, mientras que el estudiante que empleó GeoGebra integró visualizaciones dinámicas, manipulación de objetos y razonamiento gráfico para construir y validar su modelo. Esta diferencia evidenció no solo un cambio en las herramientas disponibles, sino también en la forma de pensar y representar el problema matemático.

Además, el uso de funciones interactivas como los deslizadores le permitió al estudiante que usó GeoGebra explorar el fenómeno como un sistema de cambio continuo, lo cual potenció su capacidad de razonamiento covariacional. Esta posibilidad

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

de manipulación visual contribuyó a una interpretación más rica y flexible del problema. En términos teóricos, este análisis permite avanzar en la comprensión del impacto del entorno tecnológico en los procesos de modelización. Desde una perspectiva práctica, sugiere la necesidad de incorporar herramientas digitales en la enseñanza universitaria de la matemática para favorecer representaciones múltiples y fomentar la comprensión profunda de fenómenos relacionados con el cambio.

Aportes del estudio

Desde el plano teórico, este trabajo contribuye al fortalecimiento del enfoque de modelización basado en ciclos, al mostrar su aplicabilidad en contextos reales con personas estudiantes universitarias. La comparación entre casos permitió observar cómo las distintas etapas del proceso de modelización se manifiestan en función de los recursos, las concepciones previas y los entornos de trabajo. Esto ofrece evidencias que enriquecen la literatura sobre el uso de marcos cíclicos en la enseñanza del cálculo, y sienta las bases para futuros estudios que busquen generalizar estos hallazgos a partir de muestras más amplias o intervenciones sistemáticas. Asimismo, se destaca la posibilidad de utilizar los ciclos de modelización no solo como estructura teórica para el análisis, sino también como herramienta didáctica para fomentar en el estudiantado una mirada más consciente, estructurada y reflexiva sobre sus propios procesos de resolución de problemas.

En el ámbito de la práctica docente, los resultados subrayan la necesidad de diseñar tareas que no solo promuevan la adquisición de conceptos matemáticos, sino también el desarrollo de habilidades de modelización, al integrar tecnologías digitales como apoyo a la exploración, representación y validación de modelos. La inclusión de herramientas como GeoGebra permite enriquecer las formas de interacción con los problemas, favoreciendo un aprendizaje más significativo y contextualizado.

Por último, aunque el estudio se centró en dos casos seleccionados intencionadamente, estos proporcionaron indicios valiosos sobre el potencial de las tecnologías digitales para transformar las prácticas de modelización en el aula. Estos hallazgos respaldan la continuidad de esta línea de investigación, orientada a diseñar propuestas didácticas que articulen teoría y práctica en torno a la enseñanza de la modelización matemática en contextos universitarios.

Financiamiento

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
UPC-EXPOST-2025-1

Agradecimiento

A la Dirección de Investigación de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas por el apoyo brindado para realizar este trabajo de investigación a través del incentivo UPC-EXPOST-2025-1.

Consentimiento informado

Las personas autoras declaramos que quienes participamos en este estudio conocemos sobre el tratamiento de la información.

Conflicto de intereses

Las personas autoras declaran no tener algún conflicto de interés.

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Declaración de la contribución de las personas autoras

Las personas autoras declaran que leyeron y aprobaron la versión final del artículo. El porcentaje total de contribución para la conceptualización, metodología, análisis formal, investigación, redacción-borrador original y redacción-revisión y edición: validación, revisión y edición de este artículo fue el siguiente: M. M. M. 50 %., D. G. C. 20 %, M. T. 20 % y A. C. C. 10 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por la persona autora correspondiente [**M. M. M.**], previa solicitud razonable.

Preprint

Una versión Preprint de este artículo fue depositada en: https://doi.org/10.5281/zenodo.13767016

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Barajas, C., Parada, S. y Molina, J. (2018). Análisis de dificultades surgidas al resolver problemas de variación. *Educación matemática*, *30*(3), 297-323. https://doi.org/10.24844/em3003.12

Bataineh, H., Zoubi, A. y Khataybeh, A. (2019). Utilizing MATHEMATICA software to improve students' problem solving skills of derivative and its applications. *International Journal of Education and Research*, *7*(11), 57-70. http://www.ijern.com/November-2019.php

Blomhoj, M. (2008). Modelización matemática: una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática*, *23*(2), 20-35. https://doi.org/10.33044/revem.10419

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En T. Breiteig, I. Huntley y G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Ellis Horwood Limited. https://www.researchgate.net/publication/36410733_Mathematical_modelling_in_mathematics_education_and_instruction

Blum, W. (2015). *Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?* Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Elsevier. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the influence of Mathematical Thinking Style son learners' modeling behavior. *J. Math Didakt*, *31*, 99-118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Di Blasi, M. (2024). Perspectivas para el abordaje de la Modelización matemática. En M. Di Blasi, C. Fasce y S. Santos (Eds.), *Modelación Matemática: propuestas para su enseñanza* (pp. 51-61). Editorial Dunken. https://drive.google.com/file/d/1FfyG8hTOXlGPdhNaH7nRdmBqYJrlXHbE/view

García-Cuéllar, D. y Martínez-Miraval, M. (2023). Pendiente de recta tangente: elemento de conexión de la derivada como límite o razón de cambio mediado por GeoGebra. *Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação*, 56, 289-302. https://www.risti.xyz/issues/ristie56.pdf

Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling. Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling, ICTMA 14* (pp. 301-304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470

Greefrath, G. y Vorhölter, K. (2016). *ICME 13 Topical Surveys. Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1

Hunziker, S. y Blankenagel, M. (2021). Multiple case research design. En *Research design in business and management* (pp. 171-186). Springer Gabler. https://doi.org/10.1007/978-3-658-34357-6_9

Ikeda, T. (2013). Pedagogical Reflections on the Role of Modelling in Mathematics Instruction. En G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 255-275). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_22

Illanes, M. G., Breda, A. y Alvarado Martínez, H. (2023). Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de ingeniería comercial en chile. *PARADIGMA*, *44*(4), 321-350. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p321-350.id1386

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*, 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

LaRue, R. y Infante, N. E. (2015). Optimization in first semester calculus: A look at a classic problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(7), 1021-1031. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1067844

Lesh, R. y Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410607713

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *ZDM*, *38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Martínez-Miraval, M., García-Cuéllar, D. y García-Rodríguez, M. (2023). Razonamiento Covariacional y Técnicas Instrumentadas en la Resolución de un Problema de Optimización Mediado por GeoGebra. *REDIMAT–Journal of Research in Mathematics Education*, *12*(1), 56-81. https://doi.org/10.17583/redimat.11419

Mkhatshwa, T. y Doerr, H. (2018). Undergraduate students' quantitative reasoning in economic contexts. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(2), 142-161. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1442642

Ortiz, F. (2001). *Los problemas y la construcción de aprendizaje, matemática estrategias de enseñanza y aprendizaje*. Pax México.

Tejera, M., Mariani, F. y Lavicza, Z. (2022). Scissors, Cardboard and GeoGebra: Technology as instruments, not only as artefacts. *Proceedings of the 27th Asian Technology Conference in Mathematics*, 383-390. https://atcm.mathandtech.org/EP2022/regular/21984.pdf

Thompson, P. y Dreyfus, T. (2016). A coherent approach to the Fundamental Theorem of Calculus using differentials. En R. Göller, R. Biehler y R. Hochsmuth (Eds.), *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline* (pp. 355-359). KHDM. https://pat-thompson.net/PDFversions/2016Thompson-Dreyfus.pdf

Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G. y Hernández-Rebollar, L. A. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM–Mathematics Education*, *56*(4), 1093-1108. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6

Stake, R. (2010). *Qualitative research. Studying how things work*. The Gilford Press. https://www.guilford.com/books/Qualitative-Research/Robert-Stake/9781606235454/summary

Villarreal, M. y Mina, M. (2013). Modelización en la formación inicial de profesores de matemática. VIII CNMEN. Conference: VIII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, Santa María, Brasil. https://www.researchgate.net/publication/263083171_MODELIZACION_EN_LA_FORMACION_INICIAL_DE_PROFESORES_DE_MATEMATICA

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espaço Plural*, *18* (36), 219-251. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=445955647011

Vrancken, S. y Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: Resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 449-468. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Yin, R. (2018). *Case study research and applications: Design and methods*. Sage. https://uk.sagepub.com/en-gb/eur/case-study-research-and-applications/book250150

Zengin, Y. (2018). Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(7), 1083-1098. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850

UNICIENCIA Vol. 39, N°. 1, pp. 1-25. January-December, 2025 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr