

Análisis de la demostración mediante dos herramientas: el modelo de Toulmin y la configuración ontosemiótica

Analyzing proof using two frameworks: Toulmin's model and the Onto-Semiotic configuration

Análise da demonstração usando duas ferramentas: o modelo de Toulmin e a configuração ontosemiótica.

Bettina Milanesio^{1*}, María Burgos¹

Received: Aug/19/2024 • Accepted: Mar/18/2025 • Published: Nov/30/2025

Resumen

En las investigaciones en educación matemática se ha generado un creciente interés por analizar cómo el estudiantado entiende la demostración conforme avanza en su formación. Dicho análisis precisa de herramientas teóricas específicas que guíen tanto el diseño de tareas concretas como el reconocimiento y gestión de los conocimientos del alumnado. **[Objetivo]** El objetivo de este trabajo es ejemplificar el uso articulado de dos herramientas para el estudio de la demostración: el modelo de Toulmin ampliado y la configuración ontosemiótica del enfoque ontosemiótico. **[Metodología]** Se realiza un estudio cualitativo, descriptivo, basado en un estudio de casos con estudiantes de primer curso universitario cuando demuestran propiedades aritméticas. La implementación se realizó en tres momentos diferentes durante el curso de Matemática Discreta en una universidad argentina en el 2023. **[Resultados]** Al inicio del curso, la herramienta de análisis revela las limitaciones en las argumentaciones propuestas por el estudiantado para validar las proposiciones implicadas. Mediante argumentaciones inductivas y abductivas, concluyeron con la formulación de conjeturas, mostrando convencimiento sobre su veracidad. A medida que avanzaron en su formación, los resultados mejoraron, pues recurrieron a argumentaciones deductivas para demostrar. Aun así, el análisis realizado permitió identificar dificultades durante el desarrollo de las demostraciones, asociadas a los procesos que se necesitan transitar. **[Conclusiones]** Este trabajo revela la sinergia entre las herramientas empleadas para caracterizar las estructuras argumentativas en el proceso de demostración seguido por el grupo de estudiantes y tomar conciencia de su complejidad como factor explicativo de las dificultades en este proceso.

Palabras clave: demostración matemática; argumentación matemática; educación universitaria; configuración ontosemiótica; modelo de Toulmin.

* Corresponding author

Bettina Milanesio, ✉ bettinamilanesio@gmail.com,  <https://orcid.org/0000-0003-2489-0004>

María Burgos, ✉ mariaburgos@ugr.es,  <https://orcid.org/0000-0002-4598-7684>

¹ Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.



Abstract

In mathematics education research, there has been a growing interest in analyzing how students understand proof as they progress in their studies. This analysis requires specific theoretical tools that guide both the design of concrete tasks and the recognition and management of students' knowledge. **[Objective]** The objective of this paper is to exemplify the articulated use of two frameworks for studying proof: the extended Toulmin's model and the Onto-Semiotic configuration of the Onto-Semiotic approach. **[Methodology]** A qualitative, descriptive study is conducted, based on a case study with first-year university students as they prove arithmetic properties. The study was implemented three different times during the Discrete Mathematics course at an Argentinian university in 2023. **[Results]** At the beginning of the course, the analysis tool revealed the limitations in the arguments proposed by the students to validate the given propositions. Using inductive and abductive arguments, students formulated conjectures, demonstrating conviction in their truth. As their studies advanced, results improved, since they resorted to deductive arguments in their proofs. Nevertheless, the analysis revealed difficulties in the processes faced when developing proofs. **[Conclusions]** This research highlights the synergy between the tools used to characterize the argumentative structures in the students' proof process and underscores the importance of recognizing its complexity as an explanatory factor for the difficulties encountered.

Keywords: mathematical proof; mathematical argumentation; university education; Onto-Semiotic configuration; Toulmin's model.

Resumo

Nas pesquisas em educação matemática, tem havido um interesse crescente em analisar como os alunos entendem a demonstração à medida que avançam em sua formação. Essa análise requer ferramentas teóricas específicas para orientar tanto a elaboração de tarefas concretas quanto o reconhecimento e o gerenciamento do conhecimento dos alunos. **[Objetivo]** O objetivo deste artigo é exemplificar o uso articulado de duas ferramentas para o estudo da demonstração: o modelo estendido de Toulmin e a configuração ontosemiótica da abordagem ontosemiótica. **[Metodologia]** Um estudo qualitativo, descritivo e baseado em estudo de caso é realizado com alunos do primeiro ano da universidade ao demonstrarem propriedades aritméticas. A implementação foi realizada em três momentos diferentes durante o curso de Matemática Discreta em uma universidade argentina em 2023. **[Resultados]** No início do curso, a ferramenta de análise revela as limitações nos argumentos propostos pelos alunos para validar as proposições envolvidas. Por meio de argumentações indutivas e abduativas, eles concluíram com a formulação de conjecturas, demonstrando convicção sobre sua veracidade. À medida que avançavam em sua formação, os resultados melhoravam, pois usavam argumentação dedutiva para demonstrar. Mesmo assim, a análise realizada permitiu a identificação de dificuldades durante o desenvolvimento das demonstrações, associadas aos processos que precisam ser seguidos. **[Conclusões]** Este trabalho revela a sinergia entre as ferramentas utilizadas para caracterizar as estruturas argumentativas no processo de demonstração seguido pelo grupo de alunos e para tomar consciência de sua complexidade como fator explicativo das dificuldades nesse processo.

Palavras-chave: prova matemática; argumentação matemática; educação universitária; configuração ontosemiótica; modelo de Toulmin.



Introducción

Cada vez es más significativo el consenso en el campo de la Educación Matemática sobre la importancia de involucrar a las personas estudiantes de diferentes niveles educativos en los procesos de demostración (Sommerhof y Ufer, 2019; Stylianides et al., 2022). El papel central que la demostración desempeña en el compromiso de la población estudiantil con las matemáticas lleva a la necesidad de comprender cómo entienden la demostración y cuáles dificultades enfrentan (Hernández-Suarez et al., 2020).

En el origen de estas dificultades se encuentra tanto en la escasez de oportunidades del estudiantado de los niveles educativos de primaria y secundaria en prácticas que impliquen la demostración, como que cualquier tipo de argumentación puede ser aceptado en dichos niveles (Nagel et al., 2018; Stylianides et al., 2022). Esto motiva a que cuando el alumnado accede a cursos universitarios en los cuales las matemáticas se convierten en un sistema axiomático-deductivo, no reconocen qué constituye una demostración o por qué es necesaria (Sommerhoff y Ufer, 2019). Estas personas no disponen de las competencias necesarias para desarrollar demostraciones válidas o con el nivel de formalidad esperado (Lew y Mejía-Ramos, 2019; Nagel et al., 2018; Stylianides et al., 2017).

Dado que en una demostración se debe producir un argumento a favor de una afirmación matemática, que sea matemáticamente sólido y siga un discurso aceptado y conceptualmente accesible para la comunidad de aula (Stylianides et al., 2017), diversos autores han abordado el estudio de la demostración a través de la caracterización de los argumentos producidos en dicho proceso (Arce y Conejo, 2019; Inglis et al.,

2007; Knipping y Reid, 2019; Markiewicz et al., 2021; Morales-Ramírez et al., 2021; Molina y Samper, 2019; Molina et al., 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014). La mayoría de estos estudios adoptaron el modelo de Toulmin (2003) para clasificar los argumentos, al observar un predominio de argumentos que si bien son fundamentales en la elaboración de conjeturas, no son suficientes para validar el conocimiento matemático. El modelo de Toulmin se considera una herramienta potente que permite reconstruir *in situ* los pasos involucrados en un proceso de demostración. Sin embargo, en diversas investigaciones se ha evidenciado que resulta insuficiente para describir la estructura global implicada en dicho proceso. Así, autores como Knipping y Reid (2019) ampliaron dicho modelo con el objetivo de analizar estructuras argumentativas más complejas involucradas en los procesos de demostración y revelar así la estructura global.

Aunque todas estas investigaciones ponen de manifiesto la complejidad que entraña el estudio de la demostración, muy pocas han analizado las prácticas matemáticas implicadas o el origen de las dificultades en términos de los objetos y procesos involucrados. Se observa un primer avance en esta línea en trabajos como los de Markiewicz et al. (2021), Milanesio y Markiewicz (2024), Molina et al. (2019) o Morales-Ramírez et al. (2021) que emplean las herramientas teórico-metodológicas del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2019) para el estudio de la demostración, tanto desde un punto de vista epistémico como cognitivo. De manera específica, el uso del constructo configuración ontosemiótica (Godino et al., 2019) para analizar las prácticas matemáticas implicada en las demostraciones que proponen estudiantes de nivel



medio (Markiewicz et al., 2021; Morales-Ramírez et al., 2021) o desarrolladas en el nivel superior (Milanesio y Markiewicz, 2024; Molina et al., 2019) en diversos contextos (aritmético, algebraico o geométrico), permite identificar disparidades entre los significados personales e institucionales pretendidos sobre la demostración y reconocer en la complejidad ontosemiótica de dicha actividad un factor explicativo de las dificultades que manifiesta el estudiantado en la comprensión y desarrollo de demostraciones en estos niveles educativos.

El objetivo de este trabajo es analizar las posibilidades de articulación del modelo de Toulmin en el sentido ampliado que proponen Knipping y Reid (2019) y el modelo de análisis de la actividad matemática propuesto desde el EOS (Godino et al., 2019) para desarrollar análisis epistémicos y cognitivos más detallados de la actividad matemática, y, en consecuencia, contribuir a la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración.

Se ejemplifica su uso articulado para analizar las prácticas matemáticas de estudiantes de primer curso universitario de una universidad argentina, cuando resuelven situaciones que requieren tanto el descubrimiento y la demostración de conjeturas como la demostración de propiedades aritméticas dadas *a priori*. En un primer momento, el modelo de Toulmin se emplea para “singularizar argumentos en el proceso de demostración” (Knipping y Reid, 2019, p. 6); en un segundo momento, se amplía con el objetivo de exponer la estructura global involucrada en el proceso de demostración (Knipping y Reid, 2019).

A continuación, el análisis de los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas que desarrolla el estudiantado facilita una mirada microscópica de las

estrategias argumentativas, al buscar el origen de las dificultades en la propia naturaleza, uso y significado de la estructura matemática implicada.

Fundamentación teórica

En este apartado, se presentan los elementos teóricos que fundamentan nuestra investigación: la relación entre demostración y argumentación, el modelo de Toulmin como herramienta para caracterizar los distintos argumentos que pueden estar implicados en cualquier proceso de argumentación y, finalmente, las nociones de práctica, objeto y proceso desarrolladas en el EOS.

Demostración y argumentación

Aunque el término demostración es comúnmente utilizado, no existe un acuerdo compartido sobre cuál es o debería ser su significado en el campo de la educación matemática (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2024; Staples y Conner, 2022). Si bien autores como Molina et al. (2024), la definen como una cadena de “argumentos deductivos aceptados por la comunidad de matemáticos y concatenados de una manera aceptada por esa comunidad” (p. 167); una definición de demostración en el contexto escolar debe considerar no solo la necesidad de que sea aceptable desde el punto de vista de la propia disciplina matemática, sino que también tenga sentido para sus estudiantes (Stylianides et al., 2017).

Se considera la demostración como un tipo de argumentación en matemáticas (Papadaki et al., 2019; Reuter, 2023) que tiene las siguientes características (Stylianides et al., 2017):



- 1) Utiliza un conjunto de aserciones aceptadas como verdaderas y disponibles para la comunidad de aula sin más justificación (axiomas, propiedades y teoremas).
- 2) Se usan modos de argumentación válidos y conocidos por la comunidad o que están dentro de su alcance conceptual. Por ejemplo, reglas de inferencia lógico-deductivas, enumeración sistemática de todos los casos a los cuales se reduce una afirmación, construcción de contraejemplos, desarrollo de razonamientos que pueden llegar a una contradicción, entre otros.
- 3) Se comunica con formas de expresión apropiadas, conocidas o dentro del alcance conceptual de la comunidad de aula.

Stylianides et al. (2017) distinguen entre la demostración entendida como producto; es decir, una secuencia conectada de afirmaciones, y como proceso, la cual implica acciones en la búsqueda de una conclusión a favor o en contra de una afirmación matemática. En estas acciones pueden estar implicadas actividades precursoras de la demostración como conjeturar y generalizar mediante el uso de ejemplos, analogías, razonamiento inductivo, abductivo, entre otras (Stylianides et al., 2022).

Con estas características la definición de demostración previa respeta tanto el papel de la comunidad de aula donde se desarrolla la demostración como la integridad matemática propia de la demostración (Lockwood et al., 2020). En efecto, cuando un sujeto decide si un argumento es una demostración (entendida como producto), debe no solo aceptarla, sino también creer que es válida para la comunidad. Además, mientras se consideran modos de

argumentación legítimos, los sustentados por reglas lógico-deductivas se excluyen, por ejemplo, las formas de argumentación basadas en ejemplos que ofrecen una evidencia incompleta sobre la veracidad de una proposición (Stylianides et al., 2017).

Atendiendo a esta definición, una demostración es una argumentación en matemáticas, pero no toda argumentación es una demostración. La argumentación aborda otros aspectos de las matemáticas, como la abducción o la inducción, las cuales permiten descubrir estructuras o patrones en la formulación de conjeturas (Reuter, 2023).

Modelo de Toulmin

Examinar estructuras argumentativas se considera una práctica relevante en el contexto educativo, pues permite comprender mejor las formas en que cada docente enseña la demostración y cómo el estudiante llega a comprenderla (Knipping y Reid, 2019). En esta dirección, Toulmin plantea un modelo para reconstruir los argumentos empleados en cualquier proceso de argumentación. Para Toulmin (2003) un argumento es un discurso oral o escrito producto de un proceso compuesto por tres elementos básicos: la *conclusión* (afirmación u opinión cuyo valor se está tratando de establecer), los *datos* (permiten apoyar la afirmación realizada, la conclusión) y la *garantía* (posibilita que el paso de los datos a la conclusión sea legítimo, mediante una justificación a partir de inferencias basadas en reglas generales, principios, etc.). También propone tres elementos auxiliares que permiten describir un argumento: el *respaldo* (otras certezas que soportan la garantía), el *calificativo modal* (grado de fuerza conferido por la garantía que acompaña a la conclusión) y las *refutaciones* (condiciones de excepción en las que la garantía se podría anular).



Aunque el modelo de Toulmin ha sido ampliamente utilizado en diversas investigaciones, rara vez se han empleado todos los elementos (Ríos-Cuesta, 2021). La versión reducida a datos, conclusión, garantía y respaldo, considerada en este trabajo para describir las argumentaciones abductivas, inductivas, deductivas, deductivas por contraejemplo y por analogía, ha sido adoptada por autores como Arce y Conejo (2019), Pedemonte y Reid (2011) o Soler-Álvarez y Manrique (2014).

Los investigadores preocupados por caracterizar la *argumentación abductiva* reconocen que esta tiene dos funciones diferentes y que, dependiendo de esta, la estructura de la argumentación puede variar (Papadaki et al., 2019). Cuando su función es explicativa, la abducción se utiliza para razonar hacia atrás desde una conclusión deseada hasta los datos necesarios para deducirla. En cambio, cuando su función es exploratoria, se emplea para generar una hipótesis, es decir, para descubrir algo nuevo. Siguiendo el modelo de Toulmin, cuando la abducción se utiliza para explorar, a partir de la observación y organización de casos particulares (datos) se deriva una conjetura que actúa como conclusión (Soler-Álvarez y Manrique, 2014) de forma plausible (Pedemonte y Reid, 2011). La garantía está compuesta por patrones, reglas, regularidades o propiedades que se identifican en los datos (Soler-Álvarez y Manrique, 2014) y está respaldada por un enunciado o teoría matemática de la cual podría derivarse la garantía. El flujo de la argumentación es directo, desde los datos observados hasta los posibles resultados, e incluye calificativos modales para marcar el valor epistémico de la inferencia (Papadaki et al., 2019). Si la abducción se utiliza para explicar, entonces a partir de una

conclusión deseada, se propone una posible explicación que la justifique a partir de posibles datos, garantía y respaldo (Arce y Conejo, 2019; Papadaki et al., 2019). En este caso, el flujo de la argumentación retrocede hacia la posible explicación de la conclusión (Papadaki et al., 2019).

En la *argumentación inductiva* se parte de una regla general o conjetura planteada y se comprueba sobre ciertos casos particulares para tratar de constatar si dicha regla o conjetura es verdadera (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). En el argumento que surge en una argumentación inductiva, los datos corresponden a la proposición (regla o conjetura) formulada, la garantía está respaldada por la verificación de dicha proposición mediante casos concretos, de la que se deriva su aceptación provisional como verdadera, aunque es insuficiente para inferir la validez de la conclusión (Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

Aunque existen varias interpretaciones en la literatura sobre la *argumentación por analogía*, para autores como Marraud (2007) o Gascón (2020) en ese tipo de argumentación, un argumento (fuente) se transfiere desde un campo a otro (argumento término) que es análogo al anterior. Desde esta perspectiva, se presenta un argumento similar a otro, en el sentido de que, si se acepta aquel, entonces debe aceptarse el otro. Estos dos argumentos se sostienen o sucumben en conjunto porque comparten una garantía similar; es decir, si se acepta la garantía de uno entonces se debería aceptar también en el otro (Gascón, 2020). De acuerdo con Marraud (2007), solo a partir del supuesto de que el argumento fuente es aceptado por la comunidad, puede interpretarse que el enunciado “los campos argumentativos son análogos” certifica la aceptabilidad (respaldo) del argumento término.



En la *argumentación deductiva* se aplica una proposición general conocida (garantía) a unos datos dados para obtener la conclusión (Molina et al., 2019). A su vez, la garantía está respaldada por una teoría matemática que la hace válida. Las argumentaciones deductivas se producen en los procesos de demostración de conjeturas, siendo las únicas que permiten validar el conocimiento matemático, el cual es irrefutable a excepción de que existan cambios en el sistema axiomático de partida (Arce y Conejo, 2019).

El uso de *contraejemplos* se considera un tipo de argumentación deductiva (Inglis et al., 2007; Soler-Álvarez y Manrique, 2014). Los contraejemplos permiten generar nuevo conocimiento al ilustrar por qué una conjetura matemática es falsa, lo cual facilita la producción de conjeturas mejoradas (Komatsu y Jones, 2022). Siguiendo el modelo de Toulmin, el dato del argumento que surge se corresponde con el caso que no se ajusta a la regla $\exists y: (P(y) \wedge \neg Q(y))$, la garantía con la regla general $\forall x: (P(x) \rightarrow Q(x))$, el respaldo con la equivalencia lógica $\forall x: (P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \neg \exists y: (P(y) \wedge \neg Q(y))$ y la conclusión corresponde al no cumplimiento de la regla general (Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

Para Knipping y Reid (2019), entre la estructura global de la argumentación (argumento global) y el estado local de los pasos en el proceso de argumentación (argumentos locales), según el modelo de Toulmin, es posible identificar un nivel intermedio (flujo de la argumentación) definido por las conexiones entre los argumentos locales que permiten alcanzar la conclusión objetivo final. En estas conexiones, se reconoce la posible existencia de múltiples datos y múltiples conclusiones, así como que una misma declaración pueda desempeñar roles distintos

(dato, conclusión, garantía) en diferentes pasos de la argumentación, de forma que una afirmación puede tener el estado de datos en un momento concreto del flujo de argumentación, pero al mismo tiempo ser conclusión de flujos de argumentación anteriores.

Configuración ontosemiótica

El EOS es un sistema teórico que a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre la naturaleza de las matemáticas proporciona herramientas para el análisis epistémico y cognitivo de la actividad matemática (Godino et al., 2019).

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos (Godino et al., 2019). En estas prácticas intervienen *objetos matemáticos* primarios que se clasifican según su función y naturaleza en las siguientes categorías: *lenguajes* (términos, expresiones, notaciones y gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.), *situaciones-problema* (aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas), *conceptos* (introducidos mediante definiciones), *proposiciones* (enunciados sobre conceptos), *procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo) y *argumentos* (enunciados usados para validar una proposición o respaldar un procedimiento) (Godino et al., 2007).

Los objetos primarios pueden ser considerados desde cinco dimensiones duales, lo que lleva a la siguiente tipología de objetos secundarios (Godino et al., 2007):

- *Ostensivos* (materiales, perceptibles)-*no ostensivos* (abstractos, ideales).



- *Extensivos* (particulares)-*intensivos* (generales).
- *Significantes* (expresión)-*significados* (contenido).
- *Unitarios* (objetos considerados como un todo previamente conocido)-*sistémicos* (sistemas formados por distintos componentes).
- *Personales* (relativos a sujetos individuales)-*institucionales* (compartidos en una institución).

Además de su “estructura” (los objetos), la actividad matemática queda caracterizada por su “funcionamiento” (cómo interactúan los objetos), lo cual lleva a hablar de *procesos matemáticos* concediéndole una perspectiva dinámica (Font et al., 2010). Tanto los objetos primarios como los secundarios se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual permite distinguir procesos matemáticos primarios (aquellos de los que emergen los objetos primarios) y secundarios (de los que surgen los objetos secundarios). En consecuencia, se tienen procesos primarios de comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación, y procesos secundarios de materialización-idealización, particularización-generalización, significación-representación, descomposición-reificación y personalización-institucionalización (Figura 1).

En particular, el argumento como objeto primario emerge del proceso (primario) de argumentación o secuencia de acciones que da lugar a este discurso oral o escrito (Godino et al., 2019). Sin

embargo, desde una perspectiva sistémica, un argumento como objeto secundario estaría determinado por el sistema de prácticas (en las que intervienen otros objetos y procesos matemáticos primarios), el cual actúa como “conclusión mutuamente aceptable acerca de la veracidad o falsedad de una aserción” (Molina et al., 2019, p. 95). La argumentación entonces desde esta perspectiva sistémica (es decir, como proceso secundario) puede implicar acciones propias del quehacer matemático, como inducir, proponer analogías, abducir propiedades de hechos empíricos para la formulación de conjeturas, proveer pruebas deductivas de hechos previamente conjeturados y comunicar los resultados (Molina y Samper, 2019).

El EOS interpreta el *significado pragmático* de un objeto matemático (unitario o sistémico) como sistema de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego ante la resolución de situaciones-problemas

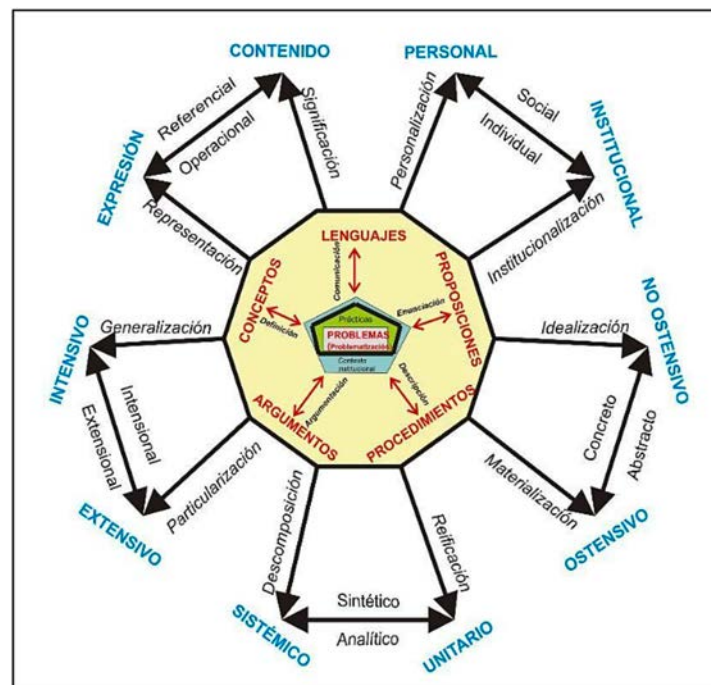


Figura 1. *Objetos y procesos matemáticos*
Fuente: extraído de Godino et al. (2020).



en las cuales interviene dicho objeto, tanto por una persona (significado personal) como por una institución (significado institucional). Mientras que esta noción de significado permite un análisis macroscópico de la actividad matemática, la identificación de las *configuraciones ontosemióticas* de prácticas (personales o institucionales), objetos y procesos garantiza un análisis microscópico para anticipar dificultades y reconocer errores, entendidos en el EOS como conflictos semióticos; es decir, discordancias entre las prácticas matemáticas que desarrolla la persona estudiante (significado personal) y las establecidas como adecuadas por la institución (significado institucional) (Godino et al., 2019).

Metodología

Se pretende contextualizar y mostrar la utilidad de la articulación del modelo de Toulmin ampliado en el sentido de Knipping y Reid (2019) y la configuración ontosemiótica para analizar la actividad matemática implicada en la demostración. Con este objetivo, mediante un enfoque cualitativo descriptivo, se desarrolla un estudio de casos con un grupo de 20 estudiantes de primer curso universitario que compartían la asignatura Matemática Discreta en una universidad argentina (en el año 2023). En esta asignatura, los y las estudiantes recibieron formación teórico-práctica sobre aspectos esenciales de la lógica proposicional, incluyendo la noción de proposición, el uso de cuantificadores y de símbolos lógicos, la noción de demostración y tipos de estrategias según la forma lógica de su enunciado (generalización, existencial y condicional). También sobre conjuntos numéricos, en particular $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, el principio de inducción matemática, las operaciones y relación de orden en $\mathbb{N}$ y sus propiedades, la

relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ y sus propiedades, el algoritmo de la división entera y la congruencia en $\mathbb{Z}$.

La elección de esta asignatura se fundamenta en el papel de la demostración y las actividades asociadas, como la conjetura y la argumentación, en el planteamiento y desarrollo de la asignatura. De hecho, el programa de la asignatura incluye objetivos como “elaborar conjeturas y validarlas”, “proponer demostraciones de proposiciones matemáticas”. La constante aplicación de estos conocimientos a lo largo de las unidades de la asignatura permite explorar las estrategias argumentativas que desarrollan las personas estudiantes ante problemas que buscan conjeturar y demostrar.

Para analizar la actividad matemática desarrollada por las personas participantes en la resolución de los problemas aplicamos el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) apoyado en los elementos del modelo de Toulmin y el análisis ontosemiótico del EOS (Godino et al., 2019):

- 1) Descomposición de las respuestas escritas en unidades de análisis, determinadas por prácticas operativas o discursivas elementales, en las que se puede identificar una función e intencionalidad en la actividad matemática analizada.
- 2) Caracterización de los datos, conclusión, garantía y respaldo en las prácticas demostrativas elementales.
- 3) Clasificación del tipo de práctica demostrativa.
- 4) Reconocimiento de los objetos y procesos emergentes de las prácticas elementales.

En la Figura 2 presentamos los tres problemas propuestos al estudiantado como medio de evaluación, que fueron acordados



previamente con la docente de Matemática Discreta. El problema 1 (preformación) se planteó durante la primera clase de la asignatura; el problema 2, al finalizar la unidad correspondiente al conjunto de los números naturales y el problema 3, cuando acabaron la asignatura.

Mientras que los problemas 1 y 3 involucran actividades relacionadas con la demostración, como la búsqueda de regularidades en diferentes ejemplos, el planteamiento de conjeturas y su validación, el problema 2 requiere de la demostración de una proposición dada *a priori*, práctica habitual en la educación superior (Lew y Zazkis, 2019). Los tres problemas persiguen la puesta en juego de diversos objetos matemáticos en el contexto de la asignatura: conjunto de números naturales, números naturales consecutivos, propiedades de las operaciones en $\mathbb{N}$, relación de divisibilidad

en $\mathbb{N}$, conjunto de números enteros, relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$, propiedades de la división, resto de la división entera.

Resultados

En este apartado se describen los resultados del análisis realizado a las respuestas de cada estudiante (E1, E2, ..., E20) a los diferentes problemas. En primer lugar, se mencionan cuáles fueron los tipos de argumentaciones más frecuentes y los errores más destacados. En segundo lugar, se seleccionaron respuestas representativas en cada uno de los problemas para mostrar el análisis detallado mediante el modelo de Toulmin ampliado y la configuración ontosemiótica: se identificaron la estructura argumentativa según los datos, conclusión, garantía y respaldo y se reconocen los objetos y procesos emergentes de las prácticas elementales

Problema 1

En cada caso, justifica tu respuesta.

- Si se suman tres números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre un múltiplo de 3?
- Si se suman cinco números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre un múltiplo de 5?
- ¿Cuándo será cierto que, si se suman k números naturales consecutivos cualesquiera, el resultado es múltiplo de k ?

Problema 2

Demuestra la siguiente proposición $\forall n \in \mathbb{N}$: si $n + 6$ es múltiplo de 9 entonces n es múltiplo de 3.

Problema 3

En cada caso justifica tu respuesta.

- ¿Cuál es el resto de dividir 6^3 por 9?
- ¿Cuál es el resto de dividir 13^3 por 9?
- ¿Cuál es el resto de dividir 20^3 por 9?
- Dado n un número entero cualquiera, ¿cuál es el resto de dividir n^3 por 9? Demuestra tu conclusión.

Figura 2. *Problemas*

Fuente: Problema 1 extraído de Sessa (2005, p. 113). Problema 2 propuesto por la docente de la asignatura. Problema 3 adaptado de González-Gutiérrez (2004, p. 269).



desarrolladas por los y las estudiantes. Nos referimos a este análisis como *análisis on-tosemiótico de la estructura argumentativa*.

Análisis del problema 1

En las prácticas matemáticas que desarrollaron las personas estudiantes para responder a los tres ítems del problema 1, se observan dificultades relacionadas, fundamentalmente, con el reconocimiento de los elementos necesarios y suficientes para elaborar una demostración. Esto se evidencia, por un lado, en el amplio uso de argumentaciones que no logran validar las proposiciones implicadas y, por otro, en la propuesta de conjeturas sin argumentación, fundamentalmente en el ítem c).

De los 39 estudiantes que proporcionaron argumentación a los ítems a) y b) (solo uno no argumentó su respuesta al ítem a), 35 lo hicieron de forma no adecuada, ya que no lograron demostrar las conjeturas implicadas. Principalmente, recurrieron a argumentaciones abductivas explicativas (16 estudiantes) del tipo “esta afirmación es verdadera, porque 3 es un número primo” (ítem a, E7), y argumentaciones inductivas (15 estudiantes) como “sí, porque ejemplo: $1 + 2 + 3 = 6$; $2 + 3 + 4 = 9$; $3 + 4 + 5 = 12$, etc.” (ítem a, E10). En menor medida, desarrollaron argumentaciones abductivas exploratorias junto con inductivas en el ítem a) (un estudiante, Figura 3), así como analógicas en el ítem b) (tres estudiantes, Figura 3). Por último, solo cuatro estudiantes plantearon argumentaciones adecuadas de tipo deductivo, como E16 en el primer ítem:

Siempre que se sumen tres naturales consecutivos, el resultado va a ser múltiplo de 3, pues a un número x le estamos agregando $x + 1$ y $x + 2$, o sea $x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3$. En todos los casos el resultado es múltiplo de 3.

En relación con el ítem c), de las 18 personas participantes que respondieron, nueve enunciaron conjeturas sin proporcionar argumentación. En algunos casos, estas se apoyaron en los argumentos proporcionados en a) y b). Por ejemplo, E13, que había recurrido a una argumentación abductiva explicativa para validar las conjeturas emergentes en a) y b) (“sí, siempre que se sumen x cantidad de números consecutivos el resultado será múltiplo de x , siendo x un número impar”), enunció en c) “esto solo será cierto si k es un número impar”. Por otro lado, ocho estudiantes emplearon argumentaciones abductivas exploratorias en las cuales identificaron una regularidad en uno o varios casos particulares (en algunos incluyeron los ejemplos tomados en a y b, Figura 6). Si bien este tipo de argumentación ayudó a enunciar una conjetura, no fue adecuada para demostrarla. Por último, solo un estudiante (E4) recurrió a una argumentación deductiva en c) como ya había hecho en a) y b), si bien no tuvo éxito:

Siempre que k sea un número impar, porque si se suman k números consecutivos naturales (siempre que k sea impar), el resultado siempre será: $xk + (1 + \text{todos los números naturales consecutivos hasta } k - 1)$, con x el primer número natural que tomemos en cuenta. Siempre el resultado de xk y del paréntesis es un múltiplo de k .

En estas prácticas, E4 se apoya implícitamente en que la suma de dos números naturales múltiplos de k es un múltiplo de k .

En la Figura 3 se presenta la solución de E19 a los ítems a) y b), identificándose el uso y la intencionalidad en las prácticas matemáticas elementales.



Práctica elemental 1 Establecer la conjetura y mostrar su validez (observable) en casos particulares.	2) EL RESULTADO DE LA SUMA DE TRES NÚMEROS NATURALES (CUALQUIERA), SIEMPRE DARÁ COMO RESULTADO UN MÚLTIPLO DE 3. ESTO ES OBSERVABLE EN LOS SIGUIENTES EJEMPLOS: $1+2+3=\boxed{6} \quad - \quad 3+4+5=\boxed{12} \quad - \quad 4+5+6=\boxed{15}$ $9+10+11=\boxed{30}$
Práctica elemental 2 Precisar la regularidad observada: en la suma de tres números naturales consecutivos se suman dos múltiplos de 3.	Y ASÍ SUCESIVAMENTE. EL POR QUÉ DE ESTE FENÓMENO NO LO SE, PERO DE QUÉ PASA ES EVIDENTE. LO ÚNICO QUE LLEGA A NOTAR, Y ES CONSTANTE, ES QUE EN CUALQUIER SUMA DE 3 NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS HAY SIEMPRE UN MÚLTIPLO DE "3" Y LOS OTROS DOS NÚMEROS AL SUMARLOS DA OTRO MÚLTIPLO DE "3" SEA EL CASO DE, POR EJ., 5: $\underbrace{3}_{\text{MÚLTIPLO DE 3}} + \underbrace{4+5}_{9 \rightarrow \text{MÚLTIPLO DE 3}} = \boxed{12}$
Práctica elemental 3 Plantear una analogía con el argumento propuesto en a) para argumentar una nueva conjetura.	6) MUY SIMILAR A LA RESOLUCIÓN DEL PUNTO 2, ES QUE PUEDO DECIR QUE SUMANDO CINCO NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS SIEMPRE DARÁ MÚLTIPLO DE 5. I.E., $1+2+3+4+5=\boxed{15}, \quad 3+4+5+6+7=\boxed{25}$ $7+8+9+10+11=\boxed{45}$ -TAMBIÉN SE DA ESA "CONSTANTE" DEL PUNTO ANTERIOR, PERO AHORA SIENDO MÚLTIPLO DE 5.

Figura 3. *Prácticas elementales e intencionalidad en la solución de E19 al problema 1 a) y b)*

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 4 se muestra el análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa desarrollada por E19 en el apartado a) del problema 1.

E19 considera cuatro casos particulares (proposiciones-datos P1, P2, P3, P4) que involucran la suma de tres naturales consecutivos y sus resultados, afirmando "y así sucesivamente". Con esta última declaración, da cuenta de que la suma de tres naturales

consecutivos dará como resultado un múltiplo de 3 (proposición-conjetura P8). A continuación, E19 reconoce que la comprobación en casos particulares no es suficiente para argumentar la conjetura, al emplear calificativos modales como "el porqué de este fenómeno no lo sé". Como indican Inglis et al. (2007), resulta fundamental prestar atención a los calificativos en las argumentaciones, pues de otra manera solo se considerarían

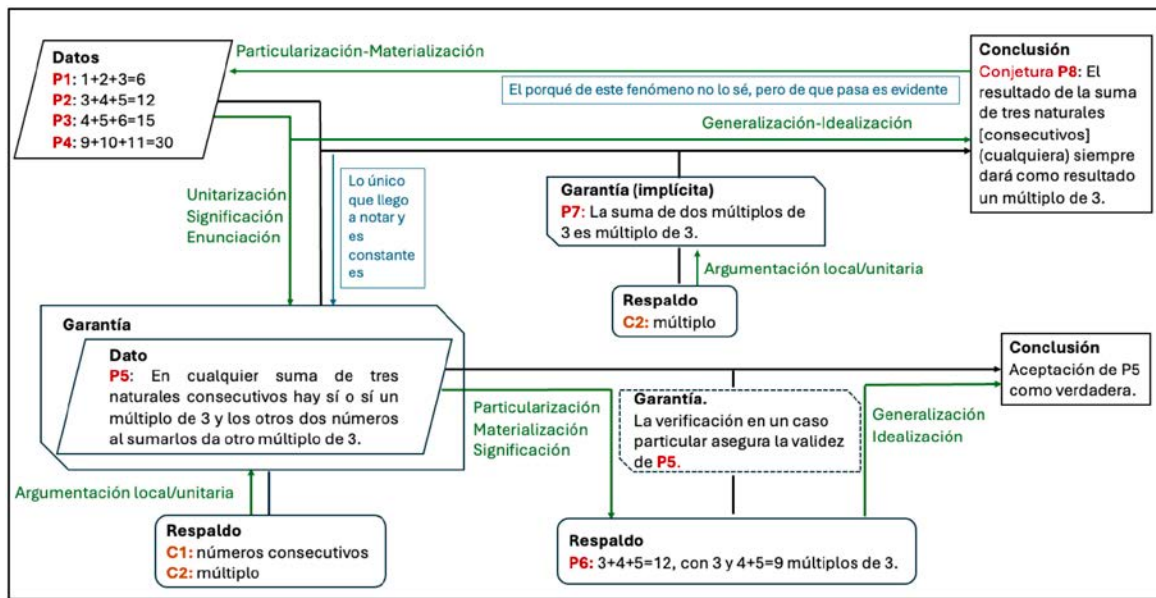


Figura 4. *Análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa de E19. Problema 1 a).*

Argumentaciones: Abductiva exploratoria – Inductiva

Fuente: elaboración propia.

argumentos con conclusiones absolutas. E19 lleva a cabo procesos de particularización y materialización en el sentido conclusión (P8) - datos (P1, P2, P3, P4), y de generalización e idealización en el sentido inverso. La unitarización y significación de los datos (P1, P2, P3, P4) llevan a E19 a enunciar la regularidad P5. Por un lado, esta regularidad actúa como garantía de la argumentación abductiva exploratoria que viene desarrollando E19, que junto con P7 (garantía implícita), permitirían el paso de los datos a la conclusión objetivo P8 (conjetura). Estas garantías vienen respaldadas por las definiciones de los conceptos implicados: números consecutivos (C1) y múltiplo (C2) (procesos de argumentación local). Por otro lado, P5 actúa como dato de la argumentación inductiva que E19 utiliza a continuación, al comprobar P5 en un caso particular (respaldo P6).

Observemos que, a diferencia de la argumentación abductiva exploratoria, aquí la particularización y materialización se produce

en el sentido dato (P5)-respaldo (P6), y la generalización que lleva a aceptar P5 como verdadera, en el sentido respaldo-conclusión.

Como se refleja en la Figura 5, para argumentar la conjetura emergente en la solución al ítem b) (Figura 3), E19 se basa en el argumento proporcionado en a), por lo que, en la estructura argumentativa implicada, podemos observar la presencia de dos mega-argumentos: el fuente y el término. Aunque la validez del argumento fuente proporcionado por E19 en el ítem a) (Figura 3) aún está en discusión (Gascón, 2020), para E19, este argumento constituye una nueva entidad unitaria que actúa como un conocimiento disponible (proceso de unitarización) en este nuevo paso. E19 debe reconocer (idealización, significación) que el dominio del argumento término es análogo al dominio del argumento fuente, en el sentido de reconocer la estructura matemática común que permita considerar que en ambos valen las mismas relaciones (Marraud, 2007).



Así, mediante la propuesta de tres casos particulares que involucran la suma de cinco consecutivos y sus resultados (P9, P10, P11), E19 afirma que “también se da esa constante del punto anterior, pero ahora siendo múltiplo de 5”. Con esta afirmación, refiere a la proposición P12, que junto con la garantía implícita P13, permitirían llegar a la conclusión P14 (conjetura).

En el ítem c) (Figura 6), E19 asegura que “a base de pruebas” la proposición implicada solo es cierta con números impares (proposición-conjetura P23). Esto sugiere que la observación y el análisis de los casos particulares que propone (“como los ejemplos del punto a y b”, P15, P18, P19) (datos), le permitieron hallar regularidades (garantías) y enunciar P23 (proposición-conclusión) (argumentación abductiva exploratoria, Figura 7).

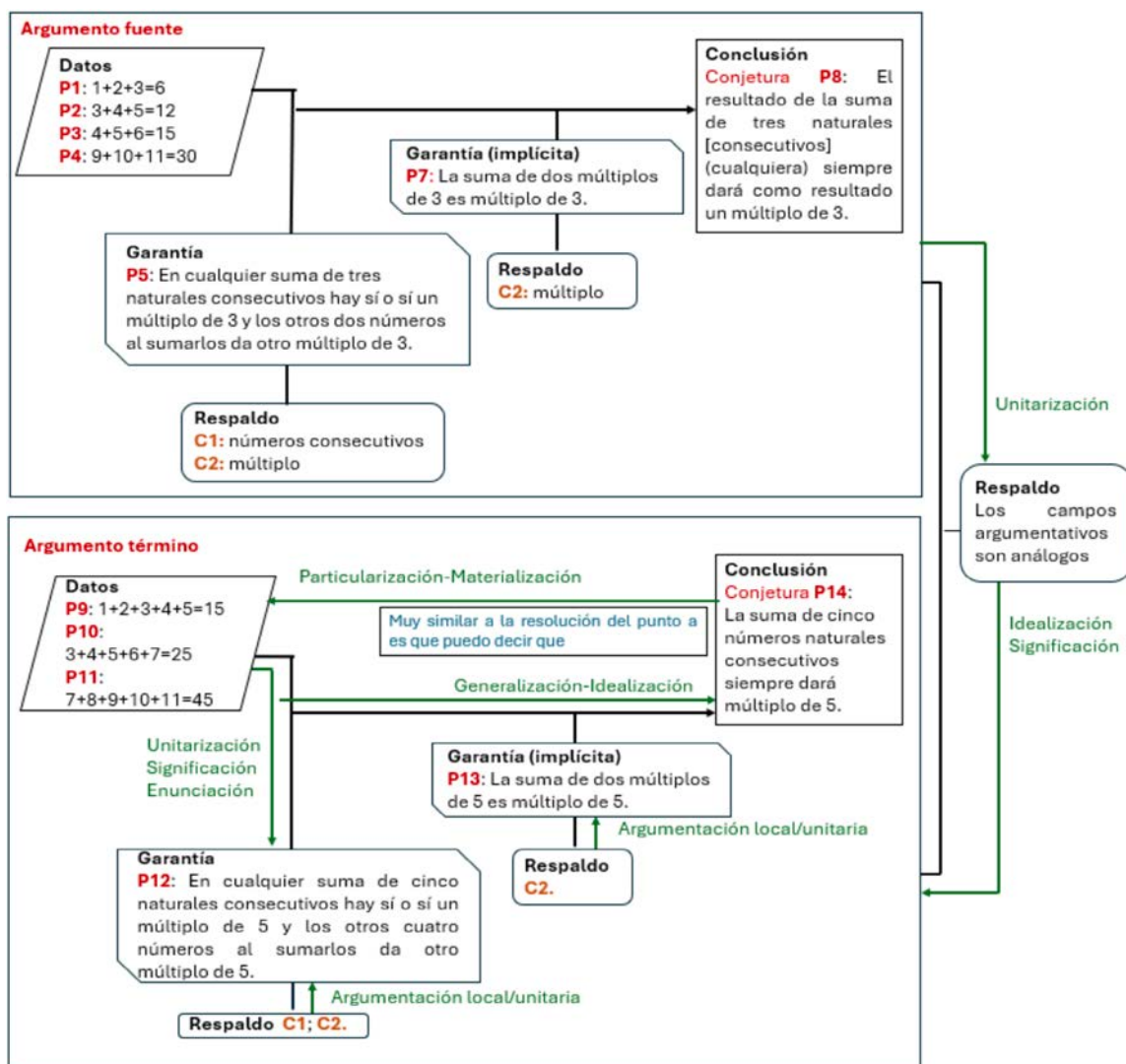


Figura 5. Análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa de E19. Problema 1 b).

Argumentación analógica

Fuente: elaboración propia.



Práctica elemental 1 Enunciar la conjetura a partir de la exploración	C) TENIENDO EN CUENTA DE SUMAR k NUMEROS NATURALES CONSECUTIVOS, EL RESULTADO SERA UN MULTIPLO DE k. ESA EXPRESION, A BASE DE PRUEBAS, PODRIA DECIR QUE SOLO ES CIERTO CON NUMEROS IMPARES, COMO LOS EJEMPLOS DEL PUNTO 2 y 6. E, 5 $1 + 2 = 3 \rightarrow$ SUMAR 2 NUMEROS CONSECUTIVOS, NO DA MULTIPLO DE 2
Práctica elemental 2 Mostrar ejemplos que avalen la conjetura	$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \rightarrow$ SUMAR 4 NUMEROS CONSECUTIVOS, NO DA MULTIPLO DE CUATRO. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 \rightarrow$ SUMAR 7 NUMEROS CONSECUTIVOS DA MULTIPLO DE 7. Y ASI EN CADA CASO.

Figura 6. *Prácticas elementales e intencionalidad en I19 al problema 1 c)*

Fuente: elaboración propia.

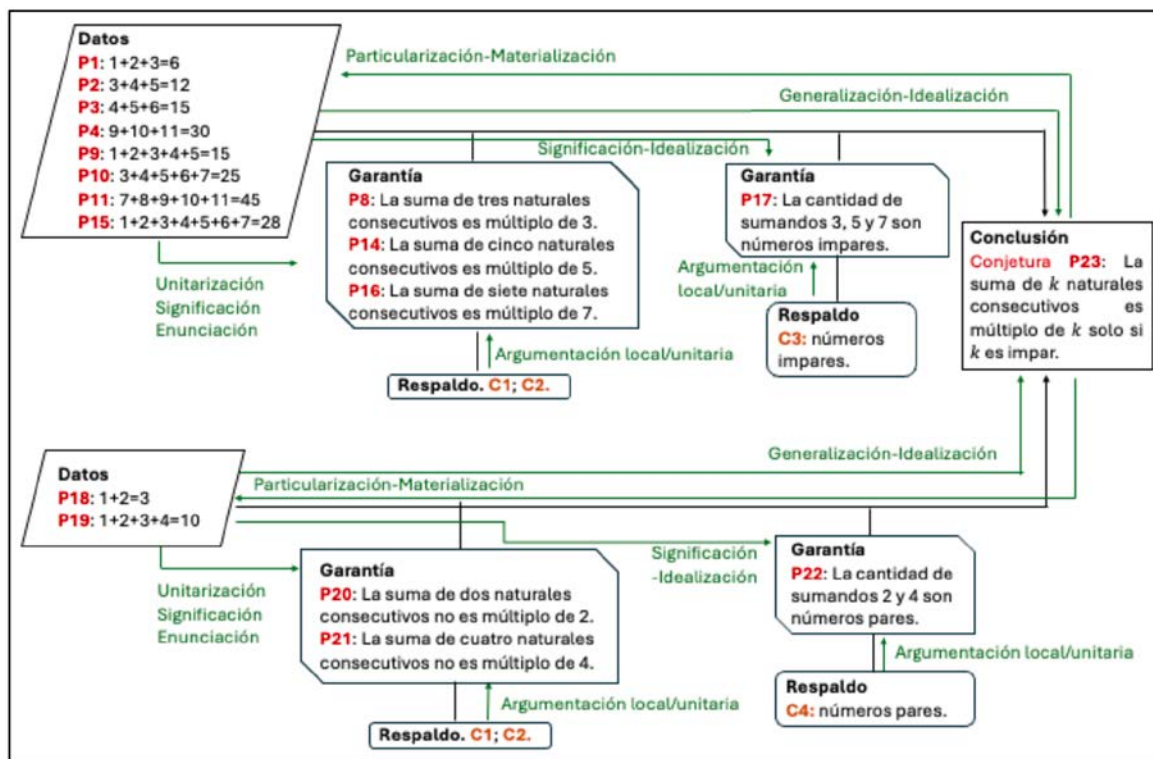


Figura 7. *Análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa de E19. Problema 1 c).*

Argumentación abductiva exploratoria

Fuente: elaboración propia.



Como podemos observar en la Figura 7, E19 recurre a dos conjuntos de datos en su argumentación. Por un lado, reconoce que si la cantidad de sumandos consecutivos es 3, 5 o 7; es decir, números impares (proposición-garantía P17), el resultado de la suma es múltiplo de 3, 5 o 7 respectivamente (proposiciones-garantías P8, P14, P16), utilizando las conjeturas emergentes en a) y b) como conocimientos disponibles (proceso de unitarización). Esto le permitió conjeturar que “la suma de k naturales consecutivos es múltiplo de k si k es impar”.

Por otro lado, si se suman 2 o 4 números consecutivos (números pares, garantía P22) no se cumple que la suma sea múltiplo de 2 o 4, respectivamente (garantías P20, P21). Esto le permite concluir que “la suma de k naturales consecutivos es múltiplo de k solo si k es impar”. Por último, con su última afirmación “y así en cada caso”, E19 muestra su convicción sobre la conjetura, aceptando que seguirá valiendo en cualquier caso que se considere.

El análisis de las prácticas de E19 muestra sus dificultades para desarrollar una demostración. E19 genera conjeturas (afirmaciones matemáticas sobre las cuales se necesita una acción adicional para su aceptación o rechazo, Stylianides, 2008), en estas muestra convencimiento, a pesar de que no las valida de manera general; se sustenta en garantías que involucran regularidades observadas en casos particulares o en la comprobación de dichas regularidades en otros casos.

Análisis del problema 2

De las 18 personas participantes que respondieron, nueve desarrollaron argumentaciones apropiadas de tipo deductivo, mientras que siete propusieron argumentaciones inadecuadas, en su mayoría

deductivas (seis estudiantes), si bien se manifestaron argumentaciones inductivas (un estudiante). Por último, dos participantes no proporcionaron argumentación.

Los nueve participantes que plantearon argumentaciones deductivas correctas aplicaron definiciones y propiedades de manera adecuada para garantizar la validez general de la proposición dada a priori, tal como se muestra en la Figura 7 con las prácticas de E4. En la actividad matemática de las seis personas estudiantes restantes que propusieron argumentaciones deductivas, se observan dificultades asociadas fundamentalmente a los procesos de idealización, significación y representación. Por un lado, aplicaron de manera inadecuada propiedades tanto lógicas (contrarrecíproco) como aritméticas (propiedad asociativa) (cinco estudiantes). Por otro lado, evidenciamos el uso del mismo literal para valores paramétricos distintos, con la intención de indicar la relación “múltiplo de” (tres estudiantes, de quienes dos hicieron un uso inadecuado de propiedades). Por ejemplo, E15 parte de la suposición $n + 6 = 9k$ ($n + 6$ es múltiplo de 9) y después obtiene $n = 3k$ (n es múltiplo de 3). Recíprocamente, E5 parte de la expresión $n = 3k'$ y obtiene $n + 6 = 9k'$.

Por último, el o la estudiante que empleó una argumentación inductiva inadecuada verificó la proposición en un caso particular “le damos el valor de 3 al n y llegamos a que $3 + 6$ es múltiplo de 9, y 3 es múltiplo de 3”, y los dos estudiantes que no proporcionaron argumentación, se limitaron a traducir al lenguaje simbólico la proposición a demostrar. En particular, E10, al no poder avanzar en la argumentación de “ $n + 6 = 9k \rightarrow n = 3k$ ”, expresó de manera adecuada el contrarrecíproco de la misma “ $n \neq 3k \rightarrow n + 6 \neq 9k$ ”, aunque tampoco logró argumentarlo.



En la Figura 8 presentamos la solución de E4 al problema 2. A continuación, en la Figura 9, incluimos el análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa global de su demostración.

E4 aplica la definición de múltiplo para reescribir de manera simbólica la proposición dada, al recurrir al símbolo “ $\rightarrow$ ” para representar la estructura del condicional “si... entonces” (procesos de representación y materialización). E4 reconoce la hipótesis (“supongo $n + 6 = 9k$, con $k \in \mathbb{Z}$ ”) y la tesis (“quiero probar que $n = 3k'$, con $k' \in \mathbb{Z}$ ”) de la proposición reescrita, si bien no es del todo adecuada, dado que al igual que k depende de

n , k' depende de k . Para comenzar su demostración, reconoce el carácter intensivo del natural, tomando un n concreto, pero arbitrario, que satisface la hipótesis (P1).

Las prácticas que siguen constituyen una cadena de afirmaciones matemáticas, donde cada una se deduce de la precedente sobre bases lógicas y matemáticas (Knipping y Reid, 2019). De este modo, algunas afirmaciones en su demostración desempeñan dos roles: como dato y como conclusión (P5, P11). En esta secuencia de declaraciones, observamos el desarrollo de un cálculo sintáctico hasta llegar a la tesis que E4 se propuso demostrar (proposición-conclusión P11).

Práctica elemental 1 Expresar en lenguaje simbólico la proposición dada. Reconocer la hipótesis y la tesis. $\forall n \in \mathbb{N} : \text{si } n+6 \text{ es múltiplo de } 9 \text{ entonces } n \text{ es múltiplo de } 3$ $n+6 = 9 \cdot k \rightarrow n = 3 \cdot k' \quad (\text{con } k, k' \in \mathbb{Z}) \text{ (por def. de múltiplo)}$ sea n fijo pero arbitrario supongo $n+6 = 9k$ con $k \in \mathbb{Z}$ q.p.q. $n = 3k'$ con $k' \in \mathbb{Z}$
Práctica elemental 2 Deducir a partir de la expresión de $n+6$ como múltiplo de 9, la de n como múltiplo de 3. $n+6 = 9k$ $\downarrow$ resto 6 en $\Rightarrow n = 9k - 6$ ambos miembros $n = 3 \cdot (3k - 2)$ saca factor común 3 $\Rightarrow n = 3 \cdot k'$ con $k' = 3k - 2$ y $k' \in \mathbb{Z}$
Práctica elemental 3 Generalizar el resultado de la práctica elemental 2 a todo natural. Luego, por TD e IG, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N} : n+6 = 9k \rightarrow n = 3k'$ $\text{con } k, k' \in \mathbb{Z}$

Figura 8. Prácticas elementales e intencionalidad en la solución de E4 al problema 2
Fuente: elaboración propia.

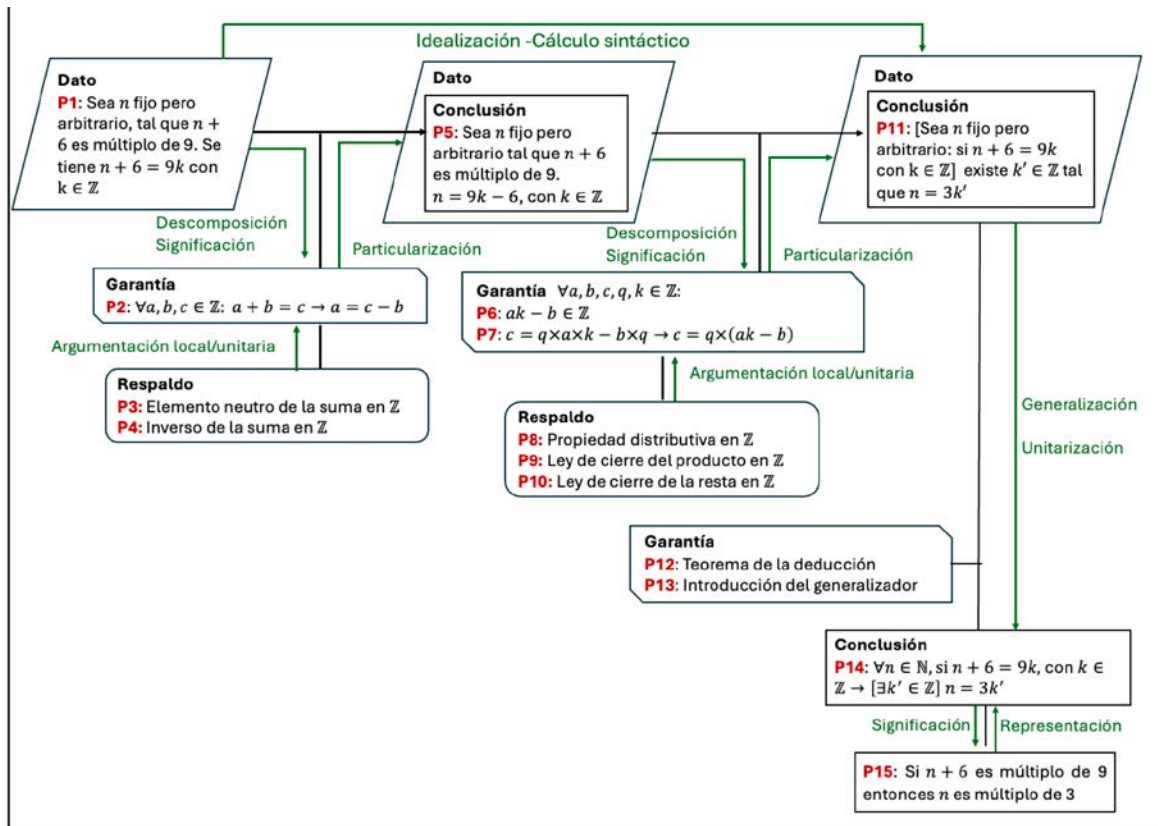


Figura 9. Análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa de E4. Problema 2.

Argumentación deductiva

Fuente: elaboración propia.

La descomposición y la significación posibilitan un tratamiento sistémico de los datos para su interpretación, y la particularización permite aplicar propiedades de las operaciones en $\mathbb{Z}$ (proposiciones-garantías P2, P6, P7) en casos concretos (P5, P11). Las garantías vienen respaldadas por proposiciones dadas *a priori* (P3, P4, P8, P9, P10) (procesos de argumentación local). En lo que sigue, E4 emplea dos reglas lógicas: el teorema de la deducción (TD) que permite inferir $p \rightarrow q$ a partir de suponer p y obtener q (con p y q proposiciones cualesquiera) (P12) y la introducción del generalizador (IG), que admite concluir la validez de una proposición para cualquier elemento, una vez se muestra su validez en un elemento concreto arbitrario (P13). Mediante el uso

de estas reglas, asegura la validez de la proposición $\forall n \in \mathbb{N}: n + 6 = 9k \rightarrow [\exists k' \in \mathbb{Z}] n = 3k'$ (P14) (procesos de generalización). Así, E4 reconoce la proposición demostrada como una nueva entidad unitaria (proceso de unitarización).

Por último, de manera implícita, se deduce la validez de la proposición dada en el enunciado (P15), mediante la aplicación particular del concepto de múltiplo y de significar al símbolo $\rightarrow$ (procesos de significación).

Análisis del problema 3

Trece estudiantes resolvieron el problema 3 (los siete restantes no se encontraban presentes). Los primeros ítems



perseguían ayudar al estudiante a formular una conjetura sobre los posibles restos de dividir n^3 por 9. Centramos la atención, por tanto, en si lograron formular una conjetura válida y demostrarla (apartado d). Seis estudiantes conjeturaron de manera adecuada y emplearon argumentaciones deductivas para demostrar sus conjeturas, como es el caso de E2 (figuras 10 y 12). Otros seis estudiantes desarrollaron argumentaciones inadecuadas de tipo abductivo exploratorio (cuatro estudiantes) y deductivo (dos estudiantes). Finalmente, un estudiante respondió solo a los ítems a), b) y c).

En relación con las argumentaciones abductivas exploratorias desarrolladas en este problema, por un lado, E18 y E20 conjeturaron “el resto de dividir n^3 por 9, con $n \in \mathbb{Z}$, puede ser 0, 1 u 8” y “el resto de dividir n^3 por 9 es 0 si n es divisible por 3, es 1 si n es un múltiplo de 3 más 1, y es 8 si n es un múltiplo de 3 más 2”, respectivamente, a partir de la observación de los casos particulares de los ítems a), b) y c).

Por otro lado, E6, además de la observación de los ejemplos en los tres primeros ítems, propuso otros que involucran desde el entero 3 hasta el entero 12 antes de plantear su conjetura “pareciera que los restos serán 0, 1 u 8”. Por último, E3 recurrió también a una argumentación abductiva exploratoria, pero que podríamos denominar incompleta, pues, desarrolló ideas intuitivas a partir del análisis de diversos ejemplos (casos 2, 3, 4, 5), pero no llegó a declarar una conjetura. Cuando E3 descubrió que el resto de dividir 5^3 por 9 coincidía con el resto de dividir 2^3 por 9, no siguió explorando otros ejemplos, sino que finalizó su resolución. E3 podría haber reconocido la regularidad, pero no la declaró.

Los dos estudiantes restantes que elaboraron argumentaciones no adecuadas

elaboraron conjeturas de manera incorrecta y recurrieron a argumentaciones deductivas para demostrarlas. E8 planteó una argumentación deductiva para validar la propiedad “en todos los casos, los restos de n^3 en la división por 9 son 0, 1, 4 y 7”. En su práctica, observamos dificultades asociadas a los procesos de cálculo sintáctico que desarrolló al elevar al cubo los naturales de la forma $9k$ más los restos posibles en la división por 9. Por ejemplo, consideró las expresiones $(9k + 2)^3$ y $729k^3 + 486k^2 + 108k + 4$ como equivalentes, o las expresiones $(9k + 4)^3$ y $729k^3 + 972k^2 + 432k + 16$; le llevó a obtener en todos los casos posibles los restos 0, 1, 4 y 7. Por su parte, E11 expresó el número entero de partida a partir de su división por 3, $n = 3q + r$, y mediante una argumentación deductiva concluyó $n^3 = 9k + r^3$. Sin embargo, consideró restos mayores o iguales a 3 en la división por 3, lo que le llevó a obtener de manera inapropiada los restos mayores que 9 en la división de n^3 por 9. Expresó, por ejemplo: “ $r = 3$, $n^3 = 9k + 27$ ” o “ $r = 4$, $n^3 = 9k + 64$ ”.

A continuación, mostramos la solución de E2. Dada la longitud de su producción, la presentamos fragmentada en dos partes: Figura 10 y Figura 12, al identificar las prácticas elementales y la intencionalidad de estas. En las figuras 11 y 13 se muestra el análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa implicada en las figuras 10 y 12, respectivamente.

Para llegar a concluir que “los restos [de dividir n^3 por 9] varían entre 0, 1 y 8” (P14 en la Figura 10), E2 utiliza dos conjuntos de datos: por una parte, P1: $6^3 = 216 = 9 \times 24 + 0$, P2: $13^3 = 2197 = 9 \times 244 + 1$ y P3: $20^3 = 8000 = 9 \times 888 + 8$, enunciadas como parte de su resolución de los apartados a), b) y c), respectivamente. Por otra, P9 establece que los restos de dividir n^3 por 9 son los



Prácticas elementales previas	$6^3 = 216 \rightarrow \begin{array}{r} 216 \overline{) 9} \\ 36 \overline{) 24} \\ \hline 0 \end{array} \rightarrow 216 = 9 \cdot 24 + 0 \quad 0 \leq 0 < 9$ $6^3 = 9 \cdot 24 + 0$ El Resto es CERO. $13^3 = 2197 \rightarrow \begin{array}{r} 2197 \overline{) 9} \\ 39 \overline{) 244} \\ \hline 37 \\ \hline 1 \end{array} \rightarrow 2197 = 9 \cdot 244 + 1 \quad 0 \leq 1 < 9$ $13^3 = 9 \cdot 244 + 1$ El Resto es 1 $20^3 = 8000 \rightarrow \begin{array}{r} 8000 \overline{) 9} \\ 80 \overline{) 888} \\ \hline 80 \\ \hline 8 \end{array} \rightarrow 8000 = 9 \cdot 888 + 8 \quad 0 \leq 8 < 9$ $20^3 = 9 \cdot 888 + 8$ El Resto es 8												
Práctica elemental 1 Relacionar los restos de dividir un número por 9 y de dividir su cubo por 9	1) SI DIVIDIMOS CUALQUIER NÚMERO POR 9, OBTENDREMOS 9 RESTOS POSIBLES: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. * LUEGO, SI LOS RESTOS DE N DIVIDIDO POR 9 SON *, ENTONCES LOS RESTOS DE N³ DIVIDIDO POR 9 SON LOS MISMOS RESTOS ELEVADOS AL CUBO. <table><tr><td>Resto 0: $0^3 = 0$</td><td>Resto 1: $1^3 = 1$</td><td>Resto 2: $2^3 = 8$</td><td>Resto 3: $3^3 = 27$</td></tr><tr><td>Resto 4: $4^3 = 64$</td><td>Resto 5: $5^3 = 125$</td><td>Resto 6: $6^3 = 216$</td><td>Resto 7: $7^3 = 343$</td></tr><tr><td>Resto 8: $8^3 = 512$</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	Resto 0: $0^3 = 0$	Resto 1: $1^3 = 1$	Resto 2: $2^3 = 8$	Resto 3: $3^3 = 27$	Resto 4: $4^3 = 64$	Resto 5: $5^3 = 125$	Resto 6: $6^3 = 216$	Resto 7: $7^3 = 343$	Resto 8: $8^3 = 512$			
Resto 0: $0^3 = 0$	Resto 1: $1^3 = 1$	Resto 2: $2^3 = 8$	Resto 3: $3^3 = 27$										
Resto 4: $4^3 = 64$	Resto 5: $5^3 = 125$	Resto 6: $6^3 = 216$	Resto 7: $7^3 = 343$										
Resto 8: $8^3 = 512$													
Práctica elemental 2 Conjeturar a partir de la práctica elemental 1 y el teorema de la división entera sobre los posibles restos al dividir el cubo de un número por 9	PERO COMO VEMOS EN 1) ESTOS RESTOS NO CUMPLEN LA CONDICIÓN 2 DEL TEOREMA: DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN ENTERA, QUE ES QUE <u>$0 \leq r < b$</u>. PODEMOS DIVIDIR A LOS RESULTADOS DE 1) POR 9. <table><tr><td>$0 \overline{) 9} \rightarrow 0 = 9 \cdot 0 + 0$ $0 \leq 0 < 9$</td><td>$1 \overline{) 9} \rightarrow 1 = 9 \cdot 0 + 1$ $0 \leq 1 < 9$</td></tr><tr><td>$8 \overline{) 9} \rightarrow 8 = 9 \cdot 0 + 8$ $0 \leq 8 < 9$</td><td>$27 \overline{) 9} \rightarrow 27 = 9 \cdot 3 + 0$ $0 \leq 0 < 9$</td></tr><tr><td>$64 \overline{) 9} \rightarrow 64 = 9 \cdot 7 + 1$ $0 \leq 1 < 9$</td><td>$125 \overline{) 9} \rightarrow 125 = 9 \cdot 13 + 8$ $0 \leq 8 < 9$</td></tr><tr><td>$216 \overline{) 9} \rightarrow 216 = 9 \cdot 24 + 0$ $0 \leq 0 < 9$</td><td>$343 \overline{) 9} \rightarrow 343 = 9 \cdot 38 + 1$ $0 \leq 1 < 9$</td></tr><tr><td>$512 \overline{) 9} \rightarrow 512 = 9 \cdot 56 + 8$ $0 \leq 8 < 9$</td><td></td></tr></table> NÚMEROS ELEVADOS AL CUBO. PODEMOS VER QUE TANTO EN LOS INCISOS ANTERIORES COMO EN ESTOS RESULTADOS LOS RESTOS VARÍAN ENTRE 0, 1 Y 8	$0 \overline{) 9} \rightarrow 0 = 9 \cdot 0 + 0$ $0 \leq 0 < 9$	$1 \overline{) 9} \rightarrow 1 = 9 \cdot 0 + 1$ $0 \leq 1 < 9$	$8 \overline{) 9} \rightarrow 8 = 9 \cdot 0 + 8$ $0 \leq 8 < 9$	$27 \overline{) 9} \rightarrow 27 = 9 \cdot 3 + 0$ $0 \leq 0 < 9$	$64 \overline{) 9} \rightarrow 64 = 9 \cdot 7 + 1$ $0 \leq 1 < 9$	$125 \overline{) 9} \rightarrow 125 = 9 \cdot 13 + 8$ $0 \leq 8 < 9$	$216 \overline{) 9} \rightarrow 216 = 9 \cdot 24 + 0$ $0 \leq 0 < 9$	$343 \overline{) 9} \rightarrow 343 = 9 \cdot 38 + 1$ $0 \leq 1 < 9$	$512 \overline{) 9} \rightarrow 512 = 9 \cdot 56 + 8$ $0 \leq 8 < 9$			
$0 \overline{) 9} \rightarrow 0 = 9 \cdot 0 + 0$ $0 \leq 0 < 9$	$1 \overline{) 9} \rightarrow 1 = 9 \cdot 0 + 1$ $0 \leq 1 < 9$												
$8 \overline{) 9} \rightarrow 8 = 9 \cdot 0 + 8$ $0 \leq 8 < 9$	$27 \overline{) 9} \rightarrow 27 = 9 \cdot 3 + 0$ $0 \leq 0 < 9$												
$64 \overline{) 9} \rightarrow 64 = 9 \cdot 7 + 1$ $0 \leq 1 < 9$	$125 \overline{) 9} \rightarrow 125 = 9 \cdot 13 + 8$ $0 \leq 8 < 9$												
$216 \overline{) 9} \rightarrow 216 = 9 \cdot 24 + 0$ $0 \leq 0 < 9$	$343 \overline{) 9} \rightarrow 343 = 9 \cdot 38 + 1$ $0 \leq 1 < 9$												
$512 \overline{) 9} \rightarrow 512 = 9 \cdot 56 + 8$ $0 \leq 8 < 9$													

Figura 10. *Prácticas elementales e intencionalidad en la primera parte de la solución de E2 al problema 3 d)*

Fuente: elaboración propia.



mismos de dividir n por 9, elevados al cubo. Es importante destacar que, aunque los restos posibles de dividir cualquier número n entre m siempre varían entre 0 y $m - 1$, E2 necesita convencerse de ello, por lo que recurre a una argumentación deductiva para demostrarlo.

El flujo de la argumentación abductiva exploratoria que va de P1, P2, P3 a P14 es directo, implicando procesos de generalización e idealización. E2 debe dotar de significado a los componentes en los datos P1, P2 y P3 para enunciar (como parte de la resolución de a), b) y c) respectivamente) las garantías (propiedades que se identifican en los datos, Soler-Álvarez y Manrique, 2014):

P4: El resto [de dividir 6^3 por 9] es 0.

P5: El resto [de dividir 13^3 por 9] es 1.

P6: El resto [de dividir 20^3 por 9] es 8.

Recíprocamente, los procesos de particularización y materialización en el sentido conclusión-datos permitirían considerar P1, P2 y P3 como tres casos particulares de la proposición P14.

Por otro lado, la proposición P9 cumple un doble rol en la argumentación deductiva, ya que, además de actuar como dato en el argumento que llega a P14, es la conclusión en el argumento previo. En efecto, E2 declara todos los restos posibles de dividir n por 9 (dato P7) y mediante la proposición P8 (garantía) que (implícitamente) aplica de manera particular, concluye P9, que lo lleva a calcular el cubo de todos los restos posibles de dividir n por 9. Sin embargo, al observar los resultados, reconoce que no cumplen con la condición del resto que

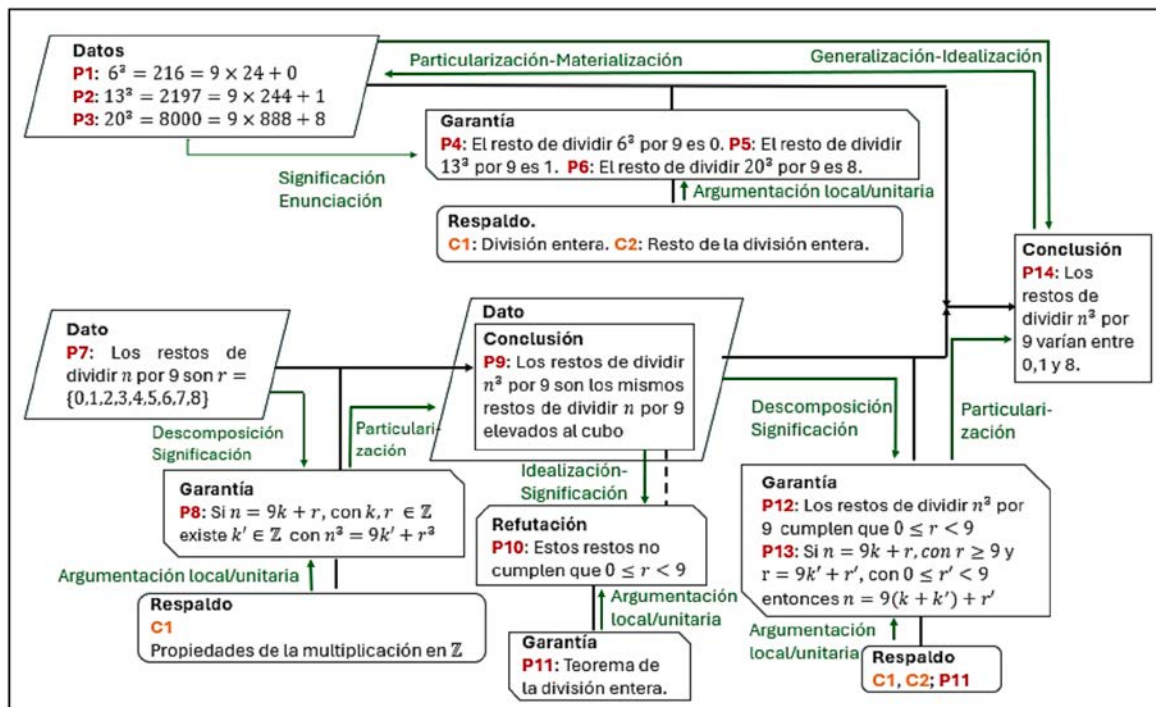


Figura 11. Análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa en la primera parte de la solución de E2. Argumentaciones: abductiva exploratoria (prácticas elementales previas) - deductiva (prácticas elementales 1 y 2)

Fuente: elaboración propia.



establece el teorema de la división entera (ver refutación P10 de la conclusión P9 en la Figura 10). Así, a partir de P9, mediante las garantías P12 y P13 (implícita), E2 divide los resultados previos por 9, para obtener como únicos restos posibles 0, 1 u 8 (P14).

En las prácticas que siguen (Figura 12), E2 descompone la conclusión P14,

buscando posibles explicaciones (datos) que permitan derivarla (argumentación abductiva explicativa).

En los datos (conjeturas emergentes en este tipo de argumentación), E2 refiere a tres relaciones entre los restos de dividir n por 3 y los de dividir n^3 por 9 (P16, P18, P20), cuyas garantías (P15, P17, P19) se

Práctica elemental 3 Relacionar la expresión de n y n^3 según los restos al dividirlos por 3 y por 9	Podemos concluir que cualquier número elevado al cubo que es divisible por 9, se pueden escribir de la forma: $\begin{aligned} n^3 &= 9 \cdot q + 0 \\ \Rightarrow n &= 3 \cdot q + 0 \end{aligned}$ $\begin{aligned} n^3 &= 9 \cdot q + 1 \\ \Rightarrow n &= 3 \cdot q + 1 \end{aligned}$ $\begin{aligned} n^3 &= 9 \cdot q + 8 \\ \Rightarrow n &= 3 \cdot q + 2 \end{aligned}$ Esto será verdad? Los restos de dividir un número por 3, tiene 3 restos posibles (0, 1, 2). Y si elevamos al cubo al 0, 1, 2 nos dan los restos de 9 (0, 1, 8) respectivamente.
Práctica elemental 4 Obtener la expresión de n^3 cuando n tiene resto 0 al dividirlo por 3	$n = 3q + 0$ $n^3 = (3q + 0)^3$ $n^3 = (3q)^3 + 3 \cdot (3q)^2 \cdot 0 + 3 \cdot 3q \cdot 0^2 + 0^3$ $n^3 = 27q^3 + 0 + 0 + 0$ $n^3 = 9 \cdot (3q^3) + 0$ $n^3 = 9q' + 0 \quad (q' = 3q^3, q' \in \mathbb{Z} \text{ por ley de cierre del prod en } \mathbb{Z})$
Práctica elemental 5 Obtener la expresión de n^3 cuando n tiene resto 1 al dividirlo por 3	$n = 3q + 1$ $n^3 = (3q + 1)^3$ $n^3 = (3q)^3 + 3 \cdot (3q)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3q) \cdot 1^2 + 1^3$ $n^3 = 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1$ $n^3 = 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1$ $n^3 = 9q' + 1 \quad (q' = 3q^3 + 3q^2 + q, q' \in \mathbb{Z} \text{ por ley de cierre de la suma en } \mathbb{Z})$
Práctica elemental 6 Obtener la expresión de n^3 cuando n tiene resto 2 al dividirlo por 3	$n = 3q + 2$ $n^3 = (3q + 2)^3$ $n^3 = (3q)^3 + 3 \cdot (3q)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (3q) \cdot 2^2 + 2^3$ $n^3 = 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8$ $n^3 = 9(3q^3 + 6q^2 + 4q) + 8$ $n^3 = 9q' + 8 \quad (q' = 3q^3 + 6q^2 + 4q, q' \in \mathbb{Z} \text{ por ley de cierre de la suma en } \mathbb{Z})$

Figura 12. Prácticas elementales e intencionalidad en la segunda parte de la solución de E2 al problema 3 d)

Fuente: elaboración propia.



basan en lo expuesto por E2 en su solución “los restos de dividir un número por 3 tiene 3 restos posibles (0, 1, 2), y si elevamos al cubo al 0, 1, 2 nos dan los restos de 9 (0, 1, 8) respectivamente”. Mediante la unitarización en el sentido datos- conclusión, se reconocería P14 como una nueva entidad unitaria. Finalmente, E2 emplea un calificativo modal que muestra su falta de convicción en la validez de estas explicaciones “¿esto será verdad?”.

Si bien inicialmente observamos dificultades en las prácticas de E2 al representar las proposiciones P16, P18 y P20 (práctica elemental 3 en Figura 12), en las argumentaciones deductivas que propone a continuación (prácticas elementales 4, 5 y 6 en Figura 12), lo hace de manera adecuada. En cada una de estas tres argumentaciones, E2 desarrolla cálculos sintácticos a partir de los datos iniciales (proposiciones P21, P26 y P28) hasta obtener las conclusiones

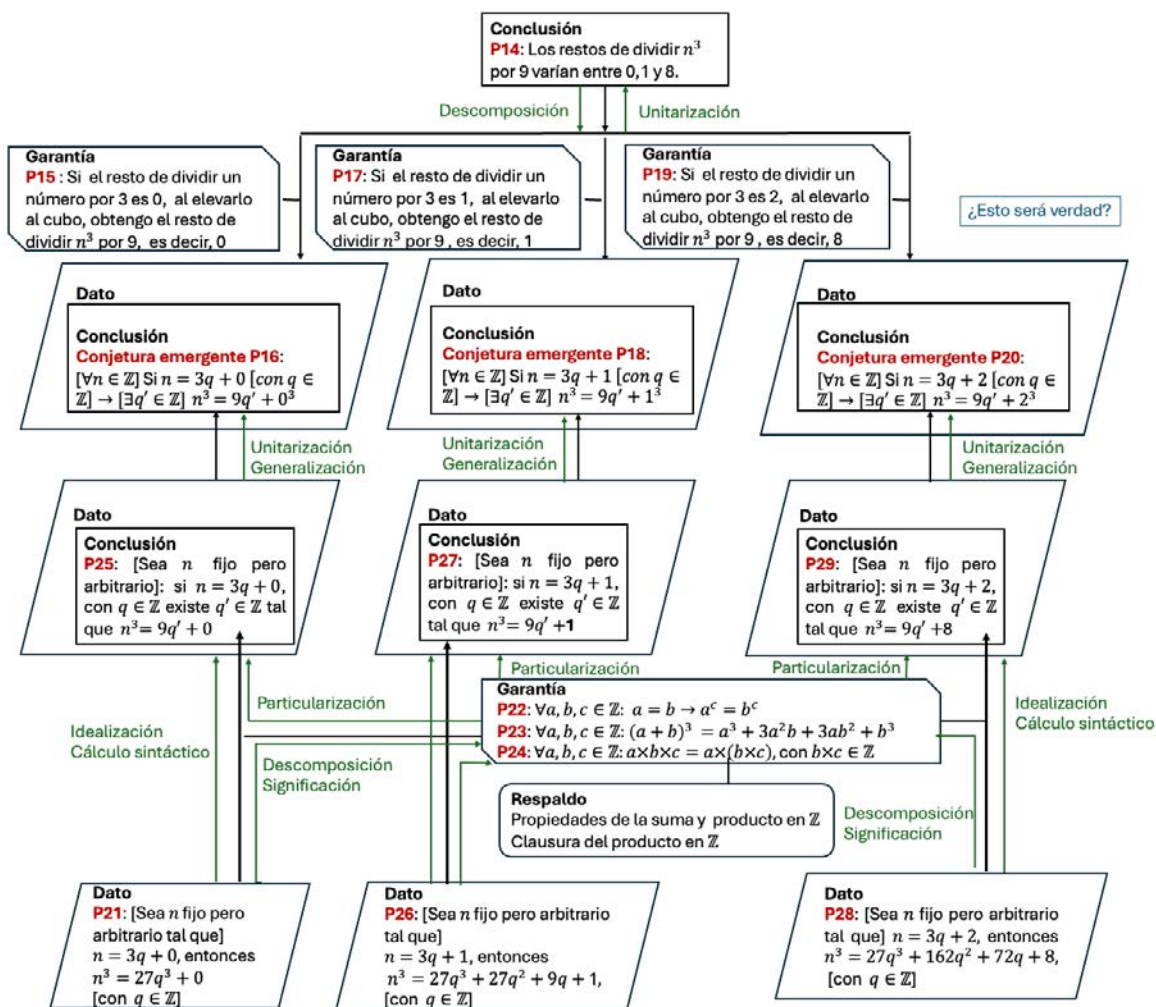


Figura 13. Análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa en la segunda parte de la solución de E2. Problema 3. Argumentaciones: abductiva explicativa (práctica elemental 3) - deductiva (prácticas elementales 4, 5 y 6)

Fuente: elaboración propia.



(proposiciones P25, P27 y P29, respectivamente). Cada una de las afirmaciones que se derivan a partir de los datos iniciales, actúan como conclusión del dato previo, y como dato para la conclusión siguiente. Mediante la descomposición y significación, E2 interpreta los datos recurriendo a propiedades generales de las operaciones con números enteros que aplica de manera particular (garantías P22, P23 y P24 en la Figura 13). Finalmente, debe reconocer el carácter general de las proposiciones, al pasar del “entero fijo pero arbitrario” a “cualquier entero” en las conjeturas halladas P16, P18 y P20, para asegurar la validez de estas, y por tanto, concluir P14 como una nueva entidad unitaria (implícito).

Discusión y conclusiones

Comprender cómo el estudiantado progresa en actividades relacionadas con la demostración como elaborar conjeturas, determinar la veracidad o falsedad de una proposición y justificar la respuesta, demostrar una proposición dada, entre otras, resulta esencial para integrar con éxito este tipo de prácticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Lew y Zazkis, 2019). En este trabajo, se propuso mostrar la utilidad de emplear de manera articulada el modelo de Toulmin ampliado (Knipping y Reid, 2019) y la configuración ontosemiótica del EOS (Godino et al., 2019) para analizar, mediante un estudio de casos, la actividad argumentativa desarrollada por estudiantes de primer curso de una universidad argentina conforme avanzan en su formación. Para ello, propusimos tres problemas que involucran la demostración, en diferentes momentos durante el desarrollo de la asignatura Matemática Discreta en el año 2023.

En el primer problema (preformación), la alta frecuencia de argumentaciones basadas en la corroboración en casos particulares (argumentaciones inductivas), en el hallazgo de regularidades a partir del análisis de casos particulares (abductivas exploratorias) o en la propuesta de posibles explicaciones (abductivas explicativas) pone en evidencia las limitaciones del alumnado para validar proposiciones matemáticas de manera general.

El análisis realizado a una solución concreta (E19) posibilitó un estudio pormenorizado de las prácticas matemáticas implicadas en algunos de estos tipos de argumentaciones y, en consecuencia, de las mencionadas limitaciones (Figura 4). En particular, la identificación de relaciones entre los elementos involucrados en las estructuras argumentativas ayudó a reconocer el origen de las dificultades del estudiantado en la propia naturaleza de dichas estructuras. Por ejemplo, la garantía en una argumentación inductiva queda respaldada por la comprobación en casos particulares, a la cual se llega mediante procesos de particularización y materialización a partir de los datos (proposición general). En el proceso de generalización e idealización que se produce desde la garantía hacia la conclusión (aceptación de la proposición como verdadera), se observa la falta de comprensión de los elementos necesarios y suficientes para construir una demostración de una proposición. Esta carencia también se evidencia en las argumentaciones abductivas exploratorias en las cuales, mediante la unitarización y significación de los datos (casos particulares) se identifica una regularidad (garantía) que permite plantear una conjetura (conclusión). En estas, los procesos de particularización y materialización en el sentido conclusión-datos permiten considerar casos particulares de la conjetura, y los de



generalización e idealización en el sentido inverso, enunciar y aceptar dicha conjetura.

Así, el análisis realizado explica, en términos de procesos, tanto las conexiones entre los elementos datos, garantía, respaldo, conclusión, como la dificultad según, por ejemplo, si la garantía se basa en la comprobación o en la identificación de regularidades en casos particulares.

En los problemas 2 y 3, las personas estudiantes emplearon de forma mayoritaria argumentaciones deductivas. Los análisis efectuados a la actividad matemática desarrollada en las soluciones escogidas (E4, E2) permitieron llevar a cabo un estudio detallado de sus prácticas y comprender, en particular, el funcionamiento del tipo de argumentación que rige las demostraciones (figuras 9, 13). En estas, a diferencia de otras argumentaciones como inductivas o abductivas exploratorias, se plantearon procesos de descomposición y significación en el sentido dato (proposición particular) –garantía (proposición general) o de particularización en la dirección garantía–; dato del siguiente argumento. También identificamos procesos de cálculo sintáctico e idealización desde los datos hacia la conclusión o de generalización y unitarización desde el último dato hacia la conclusión objetivo final (proposición emergente).

Estas relaciones permiten identificar nuevos tipos de dificultades, por ejemplo, las relacionadas con el desarrollo de un cálculo sintáctico, a los procesos de significación en el uso incorrecto de propiedades verdaderas, a los de generalización en la formulación de propiedades falsas, entre otras.

El tipo de análisis que mostramos en este trabajo evidencia la potencialidad de la articulación de las dos herramientas teóricas. El uso del modelo de Toulmin ampliado nos permitió esquematizar diversas posibilidades que ocurren usualmente en las

argumentaciones que proponen los estudiantes, y que muchas veces permanecen ocultas en sus prácticas. Por ejemplo, el uso de varios conjuntos de datos, la interpretación de una misma declaración como elemento con distinta funcionalidad en dos pasos distintos de una argumentación, la conducción a más de una conclusión, etc. Esto facilita la disposición de distintos argumentos en un mismo esquema y revela las relaciones entre estos. Además, el análisis de objetos (la estructura) y los procesos (la funcionalidad) realizado sobre estas estructuras argumentativas nos permitió alcanzar una visión microscópica de la actividad matemática implicada en las argumentaciones y demostraciones propuestas, al lograr una mayor comprensión de sus logros y dificultades (Godino et al., 2016) incluso después de haber recibido formación. Así, los esquemas desarrollados en este trabajo constituyen una concreción de la integración del modelo de Toulmin con la configuración ontosemiótica del EOS.

Investigaciones previas han analizado la actividad argumentativa desarrollada por estudiantes al combinar los objetos del EOS con el modelo reducido de Toulmin (Molina et al., 2019) o con los esquemas de argumentación (empírico, analítico, fáctico y simbólico) (Morales-Ramírez et al., 2021). Por otro lado, Arce y Conejo (2019) han articulado el modelo reducido de Toulmin con los esquemas de prueba (convicción externa, empírico, analítico). Con nuestro trabajo, complementamos estos estudios integrando el modelo de Toulmin ampliado con la configuración de objetos y procesos del EOS para analizar la actividad argumentativa (epistémica o cognitiva). El uso en conjunto de estas herramientas posibilita una comprensión más profunda del funcionamiento de los distintos tipos de argumentaciones, el cual centra la atención en las conexiones entre los elementos del



modelo de Toulmin (datos, garantía, respaldo y conclusión) según los procesos del EOS. A su vez, permite explicar el origen de las dificultades que enfrenta el estudiantado con la demostración, en términos de la propia naturaleza, uso y significado de las estructuras argumentativas implicadas.

De cara a futuras investigaciones, sería interesante refinar las relaciones halladas, investigando si la mirada de los procesos en los flujos de argumentación permite una nueva forma para categorizar/clasificar tipos de argumentaciones, así como profundizar en las posibilidades de articulación de nuestra propuesta con otros esquemas de demostración o argumentación.

Además, sería conveniente ampliar el rango de prácticas demostrativas, así como el contexto en que estas se desarrollen (no solo con personas estudiantes universitarias). Pensamos que disponer de esta información podría ayudar en el diseño de acciones formativas para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la demostración atendiendo a las necesidades específicas de cada estudiante.

Consentimiento informado

Las personas participantes fueron informadas de la finalidad de la investigación y dieron su consentimiento.

Conflicto de intereses

Las personas autoras declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de las personas autoras

Todas las personas autoras afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

Los roles de las personas autoras según CRediT fue: B. M.: recopilación y análisis de datos; redacción del borrador original. M. B.: análisis de datos; revisión del borrador original; validación.

El porcentaje total de contribución de este artículo fue el siguiente: B. M. 50 % y M. B. 50 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [B. M.], previa solicitud razonable.

Preprint

Una versión *preprint* de este artículo fue depositada en: <https://zenodo.org/doi/10.5281/zenodo.13338328>

Referencias

- Alfaro-Carvajal, C. y Fonseca-Castro, J. (2024). Specialized Knowledge of Prospective Mathematics Teachers on the Concept of Mathematical Proof. *Uniciencia* 38(1), 1-16. <https://doi.org/10.15359/ru.38-1.5>
- Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/razonamientos-y-esquemas-de-prueba-evidenciados-por-estudiantes-para-maestro-relaciones-con-el-conocimiento-matematico/>
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315456539>



- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105. <https://doi.org/10.1174/021037010790317243>
- Gascón, J. A. (2020). How to argue with coherence. *An International Journal for Theory, History and Foundations of Science*, 35(3), 327-344. <https://doi.org/10.1387/theoria.20435>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43. <https://www.jstor.org/stable/26742011>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3-15. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM*, 10, 91-110. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.144>
- González-Gutiérrez, F. (2004). *Apuntes de Matemática Discreta*. Universidad de Cádiz. <https://www.didacticamultimedia.com/registro/matematica/7/documentos/algoritmodivision.pdf>
- Hernández-Suárez, C. A., Prada-Núñez, R., Parada-Carrillo, D. A. y Pumarejo-García, L. D. (2020). La comprensión de las demostraciones matemáticas. Un estudio de revisión. *Eco Matemático*, 11(2), 100-110. <https://doi.org/10.22463/17948231.3201>
- Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 3-21. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8>
- Knipping, C. y Reid, D. A. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 3-31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_1
- Komatsu, K. y Jones, K. (2022). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 109(3), 567-591. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5>
- Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2019). Linguistic conventions of mathematical proof writing at the undergraduate level: Mathematicians' and students' perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education*, 50(2), 121-155. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.50.2.0121>
- Lew, K. y Zazkis, D. (2019). Undergraduate mathematics students' at-home exploration of a prove-or-disprove task. *Journal of Mathematical Behavior*, 54, 100674. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.09.003>
- Lockwood, E., Caughman, J. S. y Weber, K. (2020). An essay on proof, conviction, and explanation: multiple representation systems in combinatorics. *Educational Studies in Mathematics*, 103(2), 173-189. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09933-8>
- Markiewicz, M. E., Etchegaray, S. y Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(62), 1-21. <https://revistaunion.org.fespm.es/index.php/UNION/article/view/232>
- Marraud, H. (2007). La analogía como transferencia argumentativa. *Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia*, 22(2), 167-188. <https://doi.org/10.1387/theoria.466>
- Milanesio, B. y Markiewicz, M. E. (2024). La complejidad ontosemiótica de demostraciones matemáticas que se proponen en la entrada a la universidad. *Revista De Educación Matemática*, 39(1), 29-56. <https://doi.org/10.33044/revem.44897>
- Molina, O., Camargo, L., Vargas, C., Samper, C. y Perry, P. (2024). Una propuesta para la formación de profesores de matemáticas: el caso de la argumentación matemática. *RIME*, 1(1), 151-185. <https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400013356>
- Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(1), 93-116. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484>



- Molina, O. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema*, 33(63), 109-134. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06>
- Morales-Ramírez, G., Rubio-Goycochea, N. y Larios-Osorio, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema*, 35(70), 664-689. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06>
- Nagel, K., Schyma, S., Cardona, A. y Reiss, K. (2018). Análisis de la argumentación matemática de estudiantes de primer año. *Pensamiento Educativo*, 55(1), 1-12. <https://doi.org/10.7764/PEL.55.1.2018.10>
- Papadaki, C., Reid, D. y Knipping, C. (2019). Abduction in argumentation: Two representations that reveal its different functions. En T. Jankvist, M. Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 310-317). Utrecht University. <https://hal.science/hal-02398497v1>
- Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 281-303. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0>
- Reuter, F. (2023). Explorative mathematical argumentation: A theoretical framework for identifying and analyzing argumentation processes in early mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 112, 415-435. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10199-5>
- Ríos-Cuesta, W. (2021). Argumentación en educación matemática: elementos para el diseño de estudios desde la revisión bibliográfica. *Amazonia Investiga*, 10(41), 96-105. <https://doi.org/10.34069/AI/2021.41.05.9>
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Librosdelzorzal. <https://delzorzal.com/libro/iniciacion-al-estudio-didactico-del-algebra/>
- Soler-Álvarez, M. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(2), 191-219. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026>
- Sommerhof, D. y Ufer, S. (2019). Acceptance criteria for validating mathematical proofs used by school students, university students, and mathematicians in the context of teaching. *ZDM*, 51, 717-730. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01039-7>
- Staples, M. y Conner, A. (2022). Introduction: Conceptualizing argumentation, justification, and proof in mathematics education. En K. Bieda, A. Conner, K. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 1-10). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6>
- Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16. <https://www.jstor.org/stable/40248592>
- Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K. y Stylianides, G. J. (2022). Teaching and learning authentic mathematics: The case of proving. En M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 727-761). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_9-1
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics. [https://sites.math.rutgers.edu/~jpmejia/files/Stylianides_Weber_\(Compendium\).pdf](https://sites.math.rutgers.edu/~jpmejia/files/Stylianides_Weber_(Compendium).pdf)
- Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005>



Análisis de la demostración mediante dos herramientas: el modelo de Toulmin y la configuración ontosemiótica (Bettina Milanesio • María Burgos) Uniciencia is protected by Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-NC-ND 3.0)