



Conocimiento sobre fracciones de docentes de primaria en formación

Knowledge of preservice elementary teachers on fractions

Conhecimento sobre frações de docentes do ensino fundamental em formação

Elena Castro-Rodríguez¹ • Luis Rico¹

Received: Aug/4/2020 • Accepted: Sep/16/2020 • Published: Jul/31/2021

Resumen

En este trabajo profundizamos en el conocimiento sobre contenidos didácticos que futuro profesorado de primaria pone en juego al responder preguntas relativas a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción. Llevamos a cabo una metodología cualitativa, específicamente un estudio de casos. Realizamos entrevistas estructuradas a 9 estudiantes para docentes de primaria que estaban finalizando sus estudios universitarios. Para ello, introducimos a los sujetos en el tema a través de una narración que ellos mismos habían realizado anteriormente sobre cómo iniciar a escolares en el concepto de fracción. Tras su lectura, planteamos preguntas relativas al diseño de tareas, objetivos de aprendizaje, y errores y dificultades. En los resultados identificamos dos tendencias en el conocimiento manifestado por los sujetos participantes. La primera de ellas es una tendencia procedimental o técnica en la que el conocimiento manifestado hace hincapié en llevar a cabo procedimientos, procesos o modos de actuación. En la segunda de las tendencias, conceptual o cognitiva, el conocimiento manifestado pone el énfasis en la comprensión funcional de las fracciones y sus relaciones. Concluimos que es fundamental que la formación inicial de profesorado haga hincapié tanto en contenidos matemáticos como en contenidos didácticos.

Palabras clave: Análisis didáctico; contenidos didácticos; formación de profesorado; fracciones; conocimiento matemático; educación matemática.

Abstract

In this paper, we studied the knowledge on didactic contents reflected by future primary teachers when answering questions related to teaching and learning fractions. Following a qualitative methodology, specifically a case study, 9 senior pre-service primary teachers were interviewed using a structured approach. The topic was presented to the subjects using a narrative they had previously written on how to initiate the concept of fractions with school children. After reading it, they were asked questions regarding task design, learning objectives, and mistakes and difficulties. Results identified two trends in the participants' knowledge: a procedural or technical trend in which the demonstrated knowledge emphasizes procedures, processes, or action modes, and a conceptual or cognitive trend in which the demonstrated knowledge emphasizes the functional understanding of fractions and their relationships. As a conclusion, it is essential that initial teacher training emphasizes mathematical as well as didactic contents.

Elena Castro-Rodríguez, ✉ elenacastro@ugr.es,  <https://orcid.org/0000-0002-2560-8982>

Luis Rico, ✉ lrico@ugr.es,  <https://orcid.org/0000-0002-0366-5425>

¹ Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, España.



Keywords: didactical analysis; didactic content; teacher training; fractions; mathematical knowledge; mathematics education.

Resumo

Neste trabalho aprofundamos no conhecimento sobre conteúdos didáticos que futuros docentes do ensino fundamental põem em jogo ao responder perguntas relacionadas com o ensino e a aprendizagem do conceito de fração. Executamos uma metodologia qualitativa, especificamente um estudo de casos. Realizamos entrevistas estruturadas com 9 estudantes para docentes do ensino fundamental que estavam finalizando seus estudos universitários. Para isso, introduzimos os sujeitos no tema mediante uma narração que eles mesmos tinham feito anteriormente sobre como introduzir o conceito de fração com os estudantes. Depois da leitura, expusemos perguntas relacionadas com o desenho de tarefas, objetivos de aprendizagem, e erros e dificuldades. Nos resultados, identificamos duas tendências no conhecimento manifestado pelos sujeitos participantes. Na primeira delas é uma tendência procedimental ou técnica na qual o conhecimento manifestado enfatiza realizar procedimentos, processos ou modos de atuação. Na segunda das tendências, conceitual ou cognitiva, o conhecimento manifestado destaca a compreensão funcional das frações e suas relações. Concluimos que é fundamental que a formação inicial de docentes reforce tanto em conteúdos matemáticos quanto em conteúdos didáticos.

Palavras-chave: análise didáctica; conteúdos didáticos; formação de docentes; frações; conhecimento matemático; educação matemática.

INTRODUCCIÓN

En la labor del profesorado de matemáticas un amplio conocimiento de los contenidos matemáticos escolares no garantiza un buen desempeño en su práctica (Charalambous, 2016; Tirosh, 1999). Conscientes de este hecho, la formación de docentes de matemáticas ha sido y continúa siendo un campo de atención creciente por parte de las investigaciones en educación matemática, que han tratado de precisar qué conocimientos profesionales son necesarios en los planes de formación inicial (Sánchez, 2011; Tröbst, Kleickmann, Heinze, Bernholt, Rink y Kunter, 2018).

Los contenidos matemáticos necesarios para el profesorado de matemáticas están delimitados por el currículo correspondiente, los cuales se establecen normativamente mediante un listado pormenorizado

de temas de las matemáticas escolares. Parte de estos contenidos son los contenidos didáticos de cada tema del currículo, relativos al tema en tanto que son objeto de enseñanza y aprendizaje (Rico, 2016). Estos contenidos didáticos son parte relevante del conocimiento profesional y han de incluirse en los planes de formación. Ahora bien, cuando proyectamos identificar el conocimiento didáctico acerca de un tópico, no es usual disponer de un programa normalizado, con un listado de temas, cuya estructura y articulación estén explícitos. Los contenidos didáticos no están unívocamente caracterizados en educación matemática; hay que determinarlos, validarlos y calibrarlos; es decir, basar su extensión y alcance en investigaciones cuya información, organización y resultados derivados se puedan llamar contenidos didáticos del tópico.



Los contenidos didácticos, si bien están vinculados a los tópicos específicos de la matemática escolar, no tienen en la actualidad la misma precisión que los contenidos matemáticos, carecen de regulación normativa explícitamente estructurada y de documentos técnicos apropiados. Además, los grupos expertos no parecen coincidir en los criterios para su reconocimiento y aceptación. Por ello, profundizar en su estudio es de interés para su delimitación e inclusión en la formación inicial de docentes, y poder así mejorar la práctica en el aula de matemáticas.

Con este estudio queremos contribuir en la determinación de unos contenidos didácticos específicos que caractericen el conocimiento didáctico del profesorado acerca de las fracciones, sistematizar su estudio, y fundamentar propuestas de mejora en su formación sobre este tópico. Para ello, nos proponemos como objetivo profundizar en el conocimiento que sobre la enseñanza y aprendizaje muestra un grupo de docentes en formación inicial cuando responden a preguntas relativas a contenidos didácticos. Basamos los contenidos didácticos desde una perspectiva particular sobre la práctica docente, denominada análisis didáctico (Rico, 2016). Específicamente, consideramos el diseño de tareas, el planteamiento de objetivos y la detección de posibles errores y dificultades de escolares en el tema de fracciones. Nos centramos en la noción elemental del concepto de fracción que surge de la relación parte-todo, por ser este el fundamento y primer acercamiento a las fracciones (Behr *et al*, 1983; Kieren, 1993; Mack, 1990; Steffe y Olive, 1990; Streffland, 1991).

EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO EN FORMACIÓN SOBRE FRACCIONES

Las fracciones son la base y el fundamento de contenidos matemáticos más avanzados (Lamon, 2005); sin embargo, la investigación ha demostrado que los grupos escolares presentan dificultades con las fracciones (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984; Cramer, Post y del Mas, 2002; Mack, 1990). Para abordar adecuadamente estas dificultades, es importante que los maestros y maestras tengan un conocimiento adecuado sobre este tema y, por ende, sobre los números racionales. Esto ha dado lugar al desarrollo de estudios centrados en conocimientos específicos que docentes en formación expresan sobre las fracciones (D'Ambrosio y Mendoca, 1992; Domoney, 2001), las operaciones con fracciones (Charalambous, Hill y Ball, 2011; Isiksal y Cakiroglu, 2011; Li y Kulm, 2008), o en la equivalencia de fracciones (Marks, 1990). Esos estudios resaltan las importantes limitaciones que presentan en este tema el profesorado en su formación inicial, y que en muchos casos coinciden con las que presenta la población escolar de Educación Primaria (Isiksal y Cakiroglu, 2011). Además, los futuros cuerpos docentes interpretan la fracción de manera casi exclusiva como relación parte-todo (Domoney, 2001; Lo y Grant, 2012), aunque carecen de una comprensión clara de dicha noción (Castro-Rodríguez, Pitta-Pantazi, Rico y Gómez, 2016; Newton, 2008). No obstante, estudios recientes aportan nuevos enfoques a la investigación sobre el tema, identificando que estos sujetos aprovechan su conocimiento previo sobre fracciones para desarrollar nuevas



estrategias y ampliar así su conocimiento (Whitacre, Atabaş y Findley, 2019)

Otros trabajos analizan los efectos de la formación inicial en el conocimiento sobre fracciones del futuro profesorado de primaria (Rosli *et al.*, 2020; Tröbst *et al.*, 2018; 2019). Estos estudios coinciden en mostrar que, aunque hay evidencias de efectos en el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, las mejoras en el conocimiento didáctico fueron más consistentes (Tröbst *et al.*, 2018; 2019), incluso cuando la instrucción dedicada al conocimiento didáctico del contenido fue menor que la dedicada al conocimiento del contenido (Rosli *et al.*, 2020). Sin embargo, cuando la muestra seleccionada es de profesorado de secundaria en formación, al contrario de lo que ocurre con docentes de primaria en formación inicial, se obtienen mejores resultados en el conocimiento del contenido, que en el didáctico (Depaepe *et al.*, 2015).

Centrándose en contenidos didácticos específicos, como los errores o la metodología de enseñanza, Şahin, Gökkurt y Soyly (2016) obtuvieron que los maestros y maestras en formación identifican parcialmente los errores de sus estudiantes y que el método dado para corregir tales errores se basa en la memorización de reglas. En esta misma línea, se han realizado estudios que proponen a los futuros maestros y maestras analizar respuestas de escolares a tareas de división de fracciones (Adu-Gyamfi, Schwartz, Sinicrope y Bossé, 2019) y tareas de razonamiento proporcional (Jacobson, Lobato y Orrill, 2018). Los resultados de estos trabajos, contradictorios entre sí, nos sugieren que los límites entre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido no son claros. Mientras que, el trabajo de Adu-Gyamfi *et al.* (2019) afirma

que las limitaciones en la capacidad de los futuros maestros y maestras, para analizar las respuestas de sus estudiantes, interpretar las estrategias y actuar ante estas, pueden ser debidas a su conocimiento didáctico y no a su conocimiento del contenido; Jacobson *et al.* (2018) destacan que los sujetos usaron su conocimiento del contenido para dar sentido a las respuestas de escolares y que un alto conocimiento didáctico no se reflejó en la forma en que los maestros y maestras usan el conocimiento matemático en situaciones de enseñanza.

Las representaciones y su uso en la enseñanza de las fracciones también han sido uno de los contenidos didácticos tratados en la investigación (Kang y Liu, 2018; Lee y Lee, 2019; Morris, Hiebert y Spitzer, 2009). Replicando el estudio de Morris *et al.* (2009), Kang y Liu (2018) se centran en cómo futuro profesorado chino propone una respuesta ideal de sus escolares a una tarea de suma de fracciones, y qué representación (material manipulativo, papel cuadriculado, algoritmo y monedas de un centavo) selecciona como ideal para resolver una tarea de suma de fracciones. A diferencia de los resultados de Morris *et al.* (2009), la mayoría eligió el problema del algoritmo como la representación más adecuada para resolver la tarea; mientras que la opción más popular entre los sujetos de EEUU fueron las monedas, seguido del problema del papel cuadriculado. Las razones dadas fueron de tipo pragmático como el tiempo para su resolución. Otro tipo de representaciones son sugeridas por docentes de primaria en formación en Lee y Lee (2019). En este trabajo, los autores investigan cómo los participantes percibían el uso de representaciones en la enseñanza de las matemáticas y qué representaciones consideran para superar errores de estudiantes en el aprendizaje de



fracciones. Sus hallazgos mostraron la tendencia a usar pocos tipos de representaciones (área y longitud/lineal) y a hacerlo de manera procedimental.

De manera similar a los resultados obtenidos con maestros y maestras en formación, cuando los sujetos del estudio están en ejercicio, los estudios revelaron un limitado conocimiento sobre fracciones y números racionales (Jacobson y Izsák, 2015; Klemer, Rapoport y Lev-Zamir, 2018; Lee, Brown & Orrill 2011; Rojas, Flores y Carrillo, 2015). No obstante, en comparación con docentes en formación, no se han identificado diferencias significativas en el conocimiento del contenido matemático entre ambos grupos, pero sí en contenidos didácticos específicos, como selección de tareas o selección y uso de representaciones, más fáciles para los maestros y maestras en ejercicio (Charalambous, 2016).

En resumen, los estudios previos se centran en evaluar el conocimiento sobre fracciones y números racionales de profesorado en formación (Depaepe *et al.*, 2015; Tröbst *et al.*, 2019; Şahin *et al.*, 2016) o en ejercicio (Jacobson y Izsák, 2015; Klemer *et al.*, 2018; Lee, Brown & Orrill 2011; Rojas *et al.*, 2015), y destacan las carencias que presentan. Para poder superar estas carencias es necesario mejorar la formación delimitando los contenidos que han de formar parte de ella (Wu, 2018). En este estudio pretendemos aportar a la mejora de esta problemática, abordando el conocimiento sobre fracciones, desde una perspectiva sobre la práctica docente, denominada análisis didáctico (Rico, 2016). Específicamente, empleando el análisis didáctico, pretendemos elucidar aspectos básicos referidos a los contenidos didácticos de las fracciones, para ello profundizamos en el conocimiento relativo al diseño de tareas, objetivos de

aprendizaje y limitaciones que manifiestan los maestros y maestras en formación inicial sobre el concepto de fracción.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Por análisis didáctico de un contenido matemático escolar entendemos un “método para analizar, estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, los contenidos didácticos de las matemáticas escolares, con el propósito de su planificación e implementación en el aula y su evaluación” (Rico, 2016, p. 96). El análisis didáctico estructura, a su vez, un sistema de cuatro análisis, que llamamos:

- Análisis del contenido, centrado en los significados de los contenidos matemáticos escolares.
- Análisis cognitivo, determina la intencionalidad y las condiciones del logro de los aprendizajes para esos mismos contenidos.
- Análisis de instrucción, considera la elección de tareas, su organización y recursos necesarios para la enseñanza de los contenidos.
- Análisis de evaluación, valora los aprendizajes logrados, la información recogida y la toma de decisiones.

Cada uno de estos análisis se fundamenta en una dimensión curricular específica, tiene un objeto propio de estudio y consta de un sistema de componentes organizadores. Los contenidos didácticos propios de cada tema de la matemática escolar se describen mediante esos organizadores. La necesidad de una metodología para el diseño y realización de nuestro estudio nos llevó a seleccionar el análisis didáctico con esta función (Rico, 2016). En particular,



este trabajo ha utilizado los componentes del análisis cognitivo, como categorías mediante las cuales identificamos, clasificamos e interpretamos las respuestas del profesorado en formación, relativas al aprendizaje escolar de las fracciones.

Análisis cognitivo

Establecidos un nivel, ciclo y contenido escolar, el análisis cognitivo trata de organizar para qué y hasta dónde aprender sobre un tópico (Rico, 2016). De acuerdo con Lupiáñez (2013):

El análisis cognitivo se estructura en torno a lo que el profesor espera que aprendan los escolares, lo que puede interferir en ese aprendizaje y lo que permite a los escolares aprender y al profesor observar si se produce ese aprendizaje de manera efectiva. (p. 90)

En consecuencia, al llevar a cabo este análisis para un contenido matemático determinado se identifican los correspondientes contenidos didácticos:

- Objetivos, competencias y compromisos, que delimitan y organizan lo que el profesorado propone y espera que los grupos escolares aprendan acerca de la fracción como relación parte-todo, según el nivel o niveles establecidos.
- Las limitaciones en el aprendizaje, que se centran en los posibles errores en los que pueden incurrir los sujetos escolares al trabajar con la fracción como relación parte-todo, las dificultades en que pueden estar fundados esos errores y los bloqueos que pueden surgir en su proceso de aprendizaje.

- Las demandas o retos, con el diseño de tareas, como principal vehículo para brindar oportunidades de aprendizaje a la población escolar.

MÉTODO

Para dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas seguimos una metodología de estudio de casos mediante la realización de entrevistas individuales. Específicamente, es un estudio de casos instrumental, ya que tratamos de profundizar en la riqueza de la información que proporcionan los sujetos, en su diversidad y alcance, no buscamos la cantidad ni estandarizar la información que esos datos proporcionan (Stake, 2010).

Sujetos

En este estudio participaron 9 docentes en formación que cursaban los estudios universitarios del Grado de Maestro en Educación Primaria en la Universidad de Granada. Los sujetos eran estudiantes de último curso de dicha titulación. Cursaron tres asignaturas de matemáticas durante su formación universitaria. La primera de ellas centrada en el estudio del contenido de las matemáticas escolares. La segunda centrada en la enseñanza y aprendizaje de los distintos núcleos temáticos de la matemática escolar concretada en aspectos cognitivos y didácticos. La tercera orientada al estudio del currículo de matemáticas de Educación Primaria y al diseño de unidades didácticas para esta etapa.

Los sujetos fueron seleccionados entre un grupo más amplio de 82 estudiantes que habían participado en un trabajo previo (Castro-Rodríguez *et al.*, 2016), donde se categorizaron los sujetos



atendiendo a su conocimiento especializado del contenido de la relación parte todo. Los 9 sujetos participantes fueron seleccionados por pertenecer a cada una de las categorías de sujetos.

Recogida de datos e instrumento

La recogida de datos se realizó mediante entrevistas personales individualizadas con cada participante. Quien realizó la entrevista dispuso de un guion estructurado con las cuestiones a plantear a los sujetos participantes. En primer lugar, la entrevista les introdujo en una situación de enseñanza-aprendizaje relativa a las fracciones. Para ello, se entregó a cada sujeto una narración que cada quien había realizado en clase sobre cómo iniciar a los grupos escolares en el concepto de fracción. Tras la lectura de la narración, planteamos las preguntas relativas a los tres contenidos didácticos: diseño de tareas, objetivos, y errores y dificultades (Tabla 1). Entre los distintos contenidos didácticos nos centramos en estos, dado que son aspectos fundamentales en la planificación de la enseñanza (Lupiáñez, 2009).

Procedimiento

Las entrevistas se realizaron de manera individual, en una habitación aislada, para que el sonido de la grabación de audio fuese óptimo. El entrevistador era el docente de la asignatura “Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas en Educación Primaria” que los sujetos se encontraban cursando. La relación de confianza que los sujetos tenían con el entrevistador permitió un ambiente natural durante el proceso, así como obtener su colaboración. Para detectar posibles errores en el diseño y aplicación de la entrevista, se realizó un ensayo con dos sujetos tres semanas antes de realizar las entrevistas definitivas. Tras esta prueba, las tareas y preguntas de esta nueva versión resultaron claras y apropiadas, por lo que no se hicieron más modificaciones.

Análisis de los datos

Las entrevistas fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas para su análisis. Realizamos un análisis cualitativo de las respuestas para cada una de las preguntas planteadas sobre diseño de tareas, objetivos y errores y dificultades, específicamente un análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Para ello, nos basamos las categorías desarrolladas en el trabajo de Lupiáñez (2009)

Tabla 1. Preguntas de la entrevista

Contenido didáctico	Pregunta realizada
Diseño de tareas	Para introducir las fracciones a sus escolares, propón alguna tarea, actividad o problema, que complemente la secuencia de clase que elaboraste.
Objetivos	Al poner en práctica la secuencia de clase con tus estudiantes y la tarea que elaboraste, ¿qué crees que aprenderán?
Errores y dificultades	(Errores) ¿En qué se pueden equivocar los sujetos escolares al realizar la tarea? (Dificultades) ¿Por qué crees que se pueden equivocar?

Nota: Fuente propia de la investigación.



donde se analizaron dichos contenidos didácticos en unidades didácticas de un tema de las matemáticas escolares.

En primer lugar, las respuestas al diseño de tareas fueron analizadas atendiendo a la estructura de la relación parte-todo presente en el enunciado.

En segundo lugar, para el planteamiento de objetivos, se consideraron las categorías capacidad cognitiva y tipo de contenido. La primera categoría, capacidad cognitiva, hace referencia al grado de precisión al enunciar la capacidad que se espera que adquiera el estudiantado y que puede ser relativa a la realización de acciones o a la manifestación de conductas. Damos tres valores a dicha variable: *imprecisa*, *definida* y *elaborada*. Codificamos el objetivo como impreciso cuando el enunciado planteado no menciona expresamente una capacidad (por ser un enunciado meramente matemático) o es demasiado genérica. Si el enunciado del objetivo recoge una capacidad cognitiva mediante un tipo de acción singular, es codificada como definida; mientras que, si involucra más de una de una capacidad, es codificada como elaborada.

La segunda categoría, tipo de contenido, distingue el campo conceptual del procedimental. Así, en los enunciados de los objetivos, distinguimos tres valores en esta variable: aquellos que en la componente del contenido matemático se refieren a aspectos conceptuales, aquellos que se refieren a aspectos procedimentales, o bien aquellos otros que se refieren a ambos aspectos. Cabe destacar que no hemos encontrado ningún objetivo cuyo enunciado se refiera al campo actitudinal.

Por último, las respuestas relativas a limitaciones de aprendizaje se analizaron primeramente según el tipo de dificultad.

Esta variable examina, si el enunciado corresponde a un error, a una dificultad, a un obstáculo, a una ausencia de conocimiento o no es una limitación. Dependiendo del valor de la variable tipo de limitación, se analizó la respuesta según la variable tipo de dificultad o tipo de error.

La variable tipo de dificultad, de acuerdo con las categorías acotadas por [Socas \(1997\)](#), toma los valores (a) asociada a la complejidad de los objetos matemáticos, (b) asociada a los procesos propios de la actividad matemática, (c) asociada a los procesos de enseñanza, (d) asociada a los procesos de desarrollo cognitivo del alumnado, (e) asociada a actitudes afectivas y (f) emocionales hacia las matemáticas.

La variable tipo de error está basada en las categorías definidas por [Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar \(1987\)](#). Esta variable toma los valores (a) datos mal utilizados, (b) interpretación incorrecta del lenguaje, (c) inferencias no validas lógicamente, (d) teoremas o definiciones deformados, (e) falta de verificación de la solución, (f) errores técnicos, y (g) no es un error.

RESULTADOS

Presentamos los resultados, organizados según las tres componentes el diseño de tareas, el enunciado de objetivos y la identificación de errores y dificultades en el aprendizaje.

Diseño de tareas

Con respecto a la componente diseño de tareas, todos los sujetos fueron capaces de proponer, de manera natural, algún tipo de tarea. Las tareas planteadas por los sujetos participantes fueron analizadas



atendiendo la estructura de la relación parte todo presente en el enunciado. La Tabla 2 recoge el balance de las tareas que enunciaron los sujetos participantes.

Las tareas que diseñaron fueron, en todos los casos, enunciados de problemas, es decir, la descripción de una relación parte todo seguida de un interrogante. En general, se pueden considerar apropiadas de acuerdo con el tema de iniciación a las fracciones, a excepción del enunciado planteado por el sujeto S6, quien propuso un enunciado de estructura aditiva de cambio. En todos los casos presentan, en primer lugar, el todo o unidad, en algunos casos fraccionado, y se solicita el resultado de un reparto (S3, S4 y S7) o el cálculo de la fracción complementaria o las partes complementarias. En este último caso

se presentan distintas opciones: (a) dada una fracción se solicita la fracción complementaria (S1, S2, S8), (b) dada una fracción se solicita el número de partes restantes (S9), o (c) dada una o varias partes, se solicita la fracción de las partes restantes (S5).

Objetivos de aprendizaje

Con la descripción de los objetivos de aprendizaje, los sujetos expresaron una serie de conocimientos, capacidades y actitudes que esperan que el estudiantado alcance, domine y aplique con la explicación con la que se inició la entrevista, sobre cómo introducir las fracciones, que los sujetos realizaron en una sesión de clase. Todo el futuro profesorado manifestó algún tipo de objetivo, los cuales se

Tabla 2. Tareas planteadas por los sujetos participantes

Sujeto	Tarea planteada
S1	Vamos de camino al Parque de las Ciencias y hemos tirado por un camino recto para llegar antes. Cuando hemos llegado al primer semáforo que nos encontramos, llevamos recorrido $\frac{1}{3}$ del camino. ¿Cuántos nos queda para llegar, si ya no hay ningún semáforo más?
S2	Si tenemos una tarta partida en 4 trozos y yo me he comido $\frac{3}{4}$, ¿cuántos trozos quedan? Exprésalo en forma de fracción.
S3	Tenemos una cuerda demasiado grande. Queremos dividir esa cuerda para 3 personas de forma que cada una tenga un trozo, los trozos tienes que ser del mismo tamaño, ¿qué parte de la cuerda me corresponderá tener?
S4	Si Carlos tiene un pastel y quiere repartírselo a sus 6 amigos por igual, representa en forma de fracción cómo lo harías.
S5	A Marta se le ha olvidado el bocadillo para el recreo, pero su amigo Daniel decide compartirlo con ella. Si Daniel ha dividido su bocadillo en 3 trozos y se ha comido 2, ¿qué parte del bocadillo se ha comido Marta?
S6	Carolina ha hecho una tarta de chocolate por mi cumpleaños, si somos 6 y la dividimos en 6 partes iguales y yo me como la primera, ¿cuántos trozos de tarta quedan? Dibújalos.
S7	Tenemos una cinta de colores que hemos comprado entre 3 amigos, ¿qué parte le correspondería a cada a amigo?
S8	Mi madre parte el bizcocho en 3 partes iguales. Si mi hermano se come dos tercios del bizcocho, ¿cuánto queda para comerme yo?
S9	María tiene en su casa una barra de pan dividida en tres trozos. Si coge $\frac{1}{3}$ de la barra partida en trozos, ¿cuántos quedan para su hermana y su madre?

Nota: Fuente propia de la investigación.



recogen en la Tabla 3. Siguiendo a Lupiáñez (2009), para el análisis de las respuestas utilizamos dos categorías: *capacidad cognitiva* y *tipo de contenido*.

La mayoría de los sujetos no encontraron excesivas dificultades para enunciar objetivos de aprendizaje asociados a su narración. Con respecto a la primera variable, capacidad cognitiva, el sujeto S2 fue el único que formuló un objetivo genérico “aprender las fracciones”. Tres de los sujetos (S1, S6 y S8) plantearon objetivos elaborados, cuya expresión incluye dos capacidades situadas en enunciados independientes: “*Dividir un objeto en partes iguales. Que la suma de las partes representa la totalidad del principio*”. El resto de sujetos planteó objetivos específicos que expresaban una única capacidad cognitiva.

En la variable tipo de contenido, se observan objetivos relativos a conocimientos conceptuales como “*Comprender la partición de las cosas, tiempo, objetos, comida, etc.*” y procedimentales “*Dividir un objeto en partes iguales*”. En la tabla anterior se observa que no existe predominio de ninguno de los dos tipos de contenidos en las respuestas de los sujetos participantes. Solo dos participantes S1 y S6 plantearon objetivos de tipo elaborado que consideran ambos tipos de conocimientos, conceptual y procedimental, en sus respuestas.

Con respecto a los conocimientos a los que hacen referencia los objetivos, seis de los casos se corresponden con conocimientos basados en la relación parte-todo que además se relacionan con los contextos planteados: “dividir un objeto” (S3, S6 y S8), “repartir” (S1), “diferenciar las partes

Tabla 3. *Objetivos planteados por los sujetos*

Sujeto	Objetivo planteado	Capacidad	Tipo de contenido
S1	Aprender a diferenciar las partes que tenemos o cogemos, de un total. Como repartir un camino en 3 trozos.	Elaborada	Ambos
S2	Aprender las fracciones.	Genérica	Conceptual
S3	Aprender las fracciones a partir de la división en partes iguales de una cuerda.	Específica	Conceptual
S4	Saber representar (no resolver) un enunciado de fracciones.	Específica	Procedimental
S5	Aprender a desenvolverse con las fracciones que se utilizan en la vida cotidiana, a utilizarlas en la vida cotidiana y aprender su utilidad, aunque no lo expresen de forma escrita.	Específica	Conceptual
S6	Aprender a dividir de una forma exacta y creativa. Comprender la partición de las cosas, tiempo, objetos, comida, etc.	Elaborada	Ambos
S7	Comprender primeramente las fracciones, y que sea un lenguaje sencillo y de la vida real, que les sea útil.	Específica	Conceptual
S8	Dividir un objeto en partes iguales. Aprender que la suma de las partes representa la totalidad del principio.	Elaborada	Procedimental
S9	Ser capaces de dominar las operaciones con las fracciones, en este caso el dominio de las restas.	Específica	Procedimental

Nota: Fuente propia de la investigación.



del todo” (S1) y “reconocer que la suma de todas las partes corresponde con el todo” (S8). Algunos de estos objetivos: “reconocer que la suma de todas las partes corresponde con el todo” y “repartir” se relacionan directamente, con las estructuras de las tareas planteadas en la pregunta anterior, mientras que “dividir un objeto” o “diferenciar las partes del todo” son más generales y encajan con cualquiera de los contextos.

Solamente S9 manifestó un objetivo ajeno al tema de iniciación a las fracciones,

que hacía referencia a las operaciones, particularmente, la resta de fracciones.

Limitaciones: Errores y dificultades

En la última pregunta referente a las limitaciones en el aprendizaje, los sujetos participantes reflexionaron acerca de los errores en que puede incurrir el estudiante al realizar su tarea y las dificultades que pueden originar estos errores. Estas respuestas se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4. *Respuestas dadas por los sujetos sobre limitaciones*

Sujeto	Respuestas sobre errores	Respuestas sobre dificultades
S1	Confundirse a la hora de saber qué lugar ocupa cada dato en la resta.	Repartir el camino. Dividir el camino en tres partes iguales y tener que coger alguna.
S2	Que (escolares) no sepan resolverlo o si lo resuelven, pondrían algo al azar.	Porque es complejo, si yo tengo 4 trozos, en vez de ver 4 puedo verlo como $\frac{4}{4}$ aunque sé que el resultado sea 1 que representa el total. Entonces puedo decir tengo 4 trozos y me he comido $\frac{3}{4}$, 4 menos $\frac{3}{4}$ y pondrá algo al azar. Porque hay que enseñarles que si tenemos una tarta en 4 trozos, eso representa el total que es igual a $\frac{4}{4}$. Entonces, si no sabe eso pondrá $4 - \frac{3}{4}$ llevándole a cometer un error.
S3	Al dividir una unidad entre tres ya que tres es un número impar.	Porque los números impares siempre crean más problemas que lo pares, los números pares los niños y las niñas los ven mucho mejor. Dividir una unidad entre un número par lo asocian mejor que si lo tienes que dividir entre números impares. Porque si tu divides 4 entre 2 sabes que te dan partes iguales... pero 1 entre 3 da cero como algo y el cero como algo puede que no lo manejen. Los niños y niñas tienen más facilidad para dividir una unidad entre un número que sea par que entre un número que sea impar.
S4	Al sumar, que sumasen también los denominadores por lo que dirían que saldría $\frac{6}{36}$.	Por despiste, porque si el profesor se lo ha explicado... muchas veces están centrado en el resultado de arriba y lo de abajo se te va, a mí me ha pasado muchas veces. Se preocupan más por sumar los numeradores que luego hacen la misma operación con los denominadores.
S5	Fallo en la comprensión. En lugar de dividir el bocadillo en tres partes iguales se dividiere en dos, ya que hay dos niños a los que repartir	Porque haya un fallo de comprensión en la lectura.



Sujeto	Respuestas sobre errores	Respuestas sobre dificultades
S6	Dividir en partes iguales y que realmente no vean bien lo que cogen o dan.	A lo mejor la regla de las medidas... ahí veo que hay mucha dejadez, que tú le digas (a estudiantes) divide una tarta en 3 partes iguales, y que cada uno la divida como quiera. No hay una forma correcta de dividirla para que después haya una solución correcta, entonces... no hacen una división exacta de la tarta y la dividen como crean. Falta utilizar las medidas, reglas...
S7	La correspondencia de gráficamente los tres trozos, a que a cada uno le corresponda un tercio. En dividir en tres partes iguales no le costaría. Sería la correspondencia gráfica a la numérica	Porque no es tan gráfico si no es más... de razonamiento, y tienen que verdaderamente comprender las fracciones, si no comprenden las fracciones no podrán hacer la equivalencia entre lo gráfico y lo numérico.
S8	En la colocación de las fracciones a la hora de restar.	Al ver fracciones, al ver un número encima de otro no se piensa que son restas normales, pueden pensar que esto (2/3) es mayor que esto (3/3). Al ver las fracciones pueden confundir los números y pensar que da igual el orden de colocación.
S9	El alumnado podría tener dificultad a la hora de plantear el problema sin las fracciones y realizarlo con ellas, quizás también podrían tener problemas con la operación y equivocarse con numerador y denominador.	Porque no he especificado cómo tendrían que hacerlo, yo he puesto que tengo tres trozos y pueden directamente quitarle dos y se ha acabado, no plantear que tengo 3 de 3 y si le quito uno tener 2/3. También, porque puede ser que no lleguen a comprender del todo el enunciado y realizar la operación simple sin obtener el resultado por medio de las fracciones

Nota: Fuente propia de la investigación.

Las respuestas dadas a la pregunta sobre errores y a la pregunta sobre dificultades, recogidas en la Tabla 4, se analizaron primeramente según la variable tipo de dificultad. Esta variable examina, si el enunciado corresponde a un error, a una dificultad, a un obstáculo, a una ausencia de conocimiento o no es una limitación. Dependiendo del valor de la variable tipo de limitación, se analizó la respuesta según la variable tipo de dificultad o tipo de error. La Tabla 5 recoge el análisis de las respuestas a las preguntas sobre limitaciones en el aprendizaje, según las variables definidas anteriormente.

Como se observa en la tabla anterior, los sujetos participantes encontraron limitaciones y carecieron de fluidez en el momento de precisar el enunciado de posibles errores en los que puede incurrir el estudiantado

en las tareas que plantearon y en vincular justificadamente tales errores a las dificultades que eventualmente pudieran originar. Algunos sujetos participantes no llegaron a formular errores y dificultades, otros formularon dificultades muy genéricas o se limitaron a repetir la misma respuesta dada a la pregunta sobre errores.

Respecto a los errores planteados, las personas participantes hicieron referencia a errores técnicos o datos mal planteados recurriendo a posibles fallos en los algoritmos de suma y resta de fracciones, a pesar de que en ninguna tarea es necesaria la realización de tales operaciones para su resolución. Otros errores dados, en relación con definiciones deformadas del concepto de fracción, fue la desigualdad de las partes al dividir el todo, y en relación con datos mal



Tabla 5. Respuestas sobre limitaciones

Sujeto	Tipo de limitación	Tipo de error	Tipo de dificultad
S1	Error y dificultad	Datos mal utilizados	Procesos propios de la actividad matemática
S2	Ausencia de conocimiento		
S3	Dificultad		Complejidad objetos matemáticos
S4	Error	Error técnico	
S5	Error y dificultad	Datos mal utilizados	Procesos de desarrollo cognitivo
S6	Error y dificultad	Teoremas o definiciones deformados	Procesos propios de la actividad matemática
S7	Dificultad		Complejidad objetos matemáticos
S8	Error	Error técnico	
S9	Dificultad		Procesos propios de la actividad matemática y a los procesos de enseñanza

Nota: Fuente propia de la investigación.

utilizados, dividir el todo en un número incorrecto de partes.

Las respuestas dadas sobre dificultades se centran en los procesos propios de la actividad matemática, particularmente en los procesos de división y reparto, procesos de desarrollo cognitivo con problema en la comprensión lectora, procesos de enseñanza debido a que el profesorado no especifica bien cómo resolver la tarea, y dificultad de los objetos matemáticos por la relación entre las representaciones gráfica y numérica de las fracciones. Destaca en las respuestas el sujeto S2, ya que fue el único que respondió a las preguntas sobre limitaciones con ausencia de conocimiento “que no sepa resolverlo o si lo resuelven pondría algo (un resultado) al azar”.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los contenidos didácticos, como parte de la formación del profesorado, necesitan ser estudiados y puestos en práctica para la formación inicial, no solo desde un punto

de vista general, sino atendiendo también a la idiosincrasia de las áreas de contenido, como la matemática escolar. Desde un punto de vista general, se han realizado análisis detallados, pero en los aspectos relativos a la especificidad de las áreas de contenido queda mucho trabajo por hacer (Wu, 2018). Este estudio, además de proporcionar información con la cual contribuir a salvar esta deficiencia de conocimiento y mejorar en la práctica la formación inicial de docentes, muestra una vía para superar dificultades que se encontraron en otros estudios (D'Ambrosio y Mendonça-Campos, 1992; Li y Kulm, 2008; Marks, 1990), en los que las carencias en el contenido sobre fracciones incidieron en sus resultados. Nuestra manera de abordar el trabajo, a través del análisis cognitivo, profundizando en el estudio de tareas, objetivos y errores y dificultades en el aprendizaje propuestas por el profesorado en formación, ha hecho posible salvar algunas de las dificultades señaladas.

Entre los resultados obtenidos sobre diseño de tareas, destacamos que los sujetos participantes propusieron en todos los casos enunciados de problemas cuando se les pide



plantear, de manera espontánea, una tarea sobre fracciones. Igualmente, la mayoría de los sujetos fueron capaces de enunciar objetivos específicos al tema. Estos objetivos hacen referencia a contenidos procedimentales y conceptuales, y a aspectos como dividir diferentes tipos de objetos y la utilidad de las fracciones. Consideramos así que estas capacidades se mostraron adecuadas por este grupo. Al respecto, subrayamos que en su segundo curso de formación universitaria este estudiantado cursó una asignatura de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la que se trataron estos aspectos, donde se pudo aprovechar el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico adquirido, como sugieren [Whitacre et al. \(2019\)](#).

En otra perspectiva, se encuentra el estudio de las limitaciones de aprendizaje. A pesar de que los sujetos fueron capaces de ejemplificar, de manera espontánea, tareas adecuadas para el aprendizaje de las fracciones redactadas en forma de problemas, tuvieron dificultades para encontrar posibles errores en los que pueden incurrir escolares en tales tareas y en vincular justificadamente los errores a dificultades que puedan originarlos. De los 9 sujetos, solo 5 plantearon errores, principalmente recurren a errores técnicos referidos a fallos en los algoritmos de la suma y resta de fracciones. Esto coincide con los resultados obtenidos por [Şahin, Gökkurt y Soyly \(2016\)](#), en donde los maestros y maestras en formación identificaron parcialmente los errores de estudiantes y el método utilizado para corregir tales errores se basó en la memorización de reglas. Tras este hallazgo, consideramos que esta es una capacidad que el grupo de docentes en formación no desarrollaron durante su formación, por lo que sería pertinente que el personal responsable de elaborar los programas para la formación docente tuviera en cuenta este aspecto como

una capacidad a incentivar en el desarrollo profesional del futuro profesorado.

Como balance de los resultados, en el conjunto de datos obtenidos en las entrevistas, identificamos dos tendencias en el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción manifestado por los sujetos participantes en el estudio. La primera de ellas es una tendencia procedimental o técnica (S4, S8 y S9) en la que el conocimiento manifestado hace hincapié en llevar a cabo procedimientos, procesos o modos de actuación. Particularmente, esta tendencia agrupa a participantes que plantearon objetivos de tipo procedimental como “dividir un objeto en partes iguales” o “dominar las operaciones con fracciones” y que, con respecto a las limitaciones, identificaron errores técnicos o dificultades asociadas a los procesos propios de la actividad matemática, principalmente relativas a las operaciones con fracciones como “al sumar fracciones, sumar los denominadores”, “en la colocación de las fracciones a la hora de restar”. En la segunda de las tendencias, la conceptual (S3, S5 y S7), el conocimiento sobre el aprendizaje manifestado pone el énfasis en la comprensión funcional de las fracciones y sus relaciones. Esta tendencia está formada por los sujetos que enunciaron objetivos de tipo aplicado o conceptual como “aprender la utilidad de las fracciones” o “aprender las fracciones a partir de la división de una cuerda” y dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticas y al desarrollo cognitivo del alumnado. Cabe destacar el sujeto S2, por presentar respuestas distantes a las dos tendencias anteriores. Su objetivo planteado “aprender fracciones” y su limitación relativa a ausencia de conocimiento “que no sepa resolverlo” nos muestra un conocimiento sobre el aprendizaje de las fracciones de tipo generalista. Estos resultados amplían hallazgos



anteriores donde solo se detectó que el personal docente de primaria en formación tiende a manifestar un conocimiento pragmático o procedimental (Kang y Liu, 2018; Lee y Lee, 2019). Una de las posibles razones es el modo de plantear las preguntas a los sujetos por estos estudios, plateando representaciones de área y parte-todo como estímulo (Lee y Lee, 2019) y dando a elegir entre varias opciones (Kang y Liu, 2018), lo cual pudo limitar y condicionar las respuestas.

A pesar de los resultados obtenidos, el presente estudio no está exento de limitaciones. Nuestro análisis no incluyó datos que describan la formación recibida, ya que esto afecta la forma en que los sujetos participantes responden a las preguntas planteadas. Otra limitación de nuestra investigación está relacionada con el tamaño de la muestra, lo que limita la posibilidad de generalización.

El conocimiento docente es esencial para garantizar una enseñanza adecuada de los tópicos matemáticos. En el caso de las fracciones, entre los distintos problemas que presenta su enseñanza, destacan la dependencia de los libros de texto (los cuales suelen presentar errores en las unidades fracciones) y la variedad de significados de la noción de fracción (Wu, 2018). Para poder superar estos problemas es primordial que los maestros y maestras tengan un conocimiento adecuado del tópico y, por ende, los cursos de formación han de reflexionar y delimitar bien los contenidos necesarios. Coincidiendo con otros trabajos (Charalambous, 2016; Lupiáñez, 2013; Rico, 2016), consideramos fundamental que la formación inicial de profesorado haga hincapié no solo en contenidos matemáticos, sino también en contenido didácticos, como las limitaciones de aprendizaje. Además, como muestra la investigación (Rosli *et al.*, 2020; Tröbst *et al.*, 2018; 2019), los cursos especializados que se centran en el desarrollo de estos contenidos,

provocan mejoras significativas en el conocimiento didáctico de los maestros y maestras. Para ello, el análisis didáctico proporciona un sistema de clasificación, según las dimensiones conceptual, cognitiva, normativa y social, útil para delimitar los contenidos didácticos en la formación de docentes.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado con ayuda del Proyecto PCG2018-095765-B-100 del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

DECLARACIÓN DE LA CONTRIBUCIÓN DE AUTORÍA

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: E.C.R. 60 % y L.R. 40 %.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE LOS DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por la autora E.C.R, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

- Adu-Gyamfi, K., Schwartz, C. S., Sinicrope, R. y Bossé, M. (2019). Making sense of fraction division: domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. *Mathematics Education Research Journal*, 31, 507-528. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00265-2>



- Behr, M. J., Lesh, R. Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Rational number concept. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). Academy Press.
- Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R. y Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323-341. <https://doi.org/10.2307/748423>
- Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L. y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 129-146. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9673-4>
- Charalambous, C. (2016). Investigating the Knowledge Needed for Teaching Mathematics: An Exploratory Validation Study Focusing on Teaching Practices. *Journal of Teacher Education*, 67(3) 220-237. <https://doi.org/10.1177/0022487116634168>
- Charalambous, C. Y., Hill, H. C. y Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(6), 441-463. <https://doi.org/10.1007/s10857-011-9182-z>
- Cramer, K. A., Post, T. R., y del Mas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144. <https://doi.org/10.2307/749646>
- D'Ambrosio, B. S. y Mendonca-Campos, T. N. (1992). Pre-service teachers' representations of children's understanding of mathematical concepts: Conflicts and conflict resolution. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 213-230. <https://doi.org/10.1007/BF02309530>
- Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., ... y Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and teacher education*, 47, 82-92. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.12.009>
- Domoney, B. (2001). Student teachers' understanding of rational numbers. En J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, (Vol. 21, num. 3, pp. 13-18). BSRLM.
- Isiksal, M. y Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(3), 213-230. <https://doi.org/10.1007/s10857-010-9160-x>
- Jacobson, E. y Izsák, A. (2015). Knowledge and motivation as mediators in mathematics teaching practice: The case of drawn models for fraction arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(5), 467-488. <https://doi.org/10.1007/s10857-015-9320-0>
- Jacobson, E., Lobato, J. y Orrill, C. H. (2018). Middle school teachers' use of mathematics to make sense of student solutions to proportional reasoning problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16, 1541-1559. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9845-z>
- Kang, R. y Liu, D. (2018). The importance of multiple representations of mathematical problems: Evidence from Chinese preservice elementary teachers' analysis of a learning goal. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16, 125-143. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9760-8>
- Kieren, T. E. (1993). The Learning of Fractions: Maturing in a Fraction. Ponencia presentada en la *Conference Fraction Learning and Instruction*, GA, Athens.
- Klemer, A., Rapoport, S. y Lev-Zamir, H. (2018). The missing link in teachers' knowledge about common fractions division. *International Journal of mathematical education in science and technology*, 50(8), 1256-1272. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1522677>
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidós.
- Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781410617132>
- Lee, M. Y. y Lee, J. E. (2019). Pre-service Teachers' Perceptions of the Use of Representations and Suggestions for Students' Incorrect Use. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and*



- Technology Education*, 15(9), em1745. <https://doi.org/10.29333/ejmste/103055>
- Lee, S. J., Brown, R. E. y Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(3), 198-220. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.564993>
- Li, Y. y Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction division. *ZDM*, 40, 833-843. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0148-2>
- Lo, J. y Grant, T. (2012). Preservice elementary teachers' conceptions of fractional units. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th PME* (Vol. 3, pp. 169-176). PME.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada, España. https://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalle/5489/
- Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp. 81-102). Comares.
- Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16-32. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.21.1.0016>
- Marks, R. (1990). Pedagogical Content Knowledge: From a Mathematical Case to a Modified Conception. *Journal of Teacher Education*, 41(3), 3-11. <https://doi.org/10.1177/002248719004100302>
- Morris, A. K., Hiebert, J. y Spitzer, S. M. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teacher learn? *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(5), 491-529. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.40.5.0491>
- Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O. e Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 3-14. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.18.1.0003>
- Newton, K. J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1080-1110. <https://doi.org/10.3102/0002831208320851>
- Rico, L. (2016). Matemática y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-100). Pirámide.
- Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de Educación Primaria al enseñar los números racionales. *Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 143-166. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>
- Rosli, R., Goldsby, D., Onwuegbuzie, A. J., Capraro, M. M., Capraro, R. M. y González, E. G. Y. (2020). Elementary preservice teachers' knowledge, perceptions, and attitudes towards fractions: A mixed-analysis. *Journal on Mathematics Education*, 11(1), 59-76. <http://doi.org/10.22342/jme.11.1.9482.59-76>
- Şahin, O., Gökkurt, B. y Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(4), 531-551. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1092178>
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.
- Stake, R. E. (2010). *Investigación cualitativa: El estudio de cómo funcionan las cosas*. The Guilford Press.
- Steffe, L. P. y Olive, J. (1990). Constructing fractions in computer microworlds. In G. Booker, P. Cobb y T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME* (pp. 59-66). CONACYT.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3168-1>



- Tirosh, D. (1999). Forms of mathematical knowledge: learning and teaching with understanding. En D. Tirosh (Ed.), *Forms of mathematical knowledge* (pp. 1-9). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1584-3_1
- Tröbst, S., Kleickmann, T., Depaepe, F., Heinze, A. y Kunter, M. (2019). Effects of instruction on pedagogical content knowledge about fractions in sixth-grade mathematics on content knowledge and pedagogical knowledge. *Unterrichtswissenschaft*, 47(1), 79-97. <https://doi.org/10.1007/s42010-019-00041-y>
- Tröbst, S., Kleickmann, T., Heinze, A., Bernholt, A., Rink, R. y Kunter, M. (2018). Teacher knowledge experiment: Testing mechanisms underlying the formation of preservice elementary school teachers' pedagogical content knowledge concerning fractions and fractional arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 110(8), 1049-1065. <https://doi.org/10.1037/edu0000260>
- Whitacre, I., Atabaş, Ş. y Findley, K. (2019). Exploring unfamiliar paths through familiar mathematical territory: Constraints and affordances in a preservice teacher's reasoning about fraction comparisons. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 148-163. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.006>
- Wu, H. H. (2018) The content knowledge mathematics teachers need. En Y. Li, W. Lewis, J. Madden (Eds.), *Mathematics matters in education. Advances in STEM education* (pp. 43-91). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61434-2_4



Conocimiento sobre fracciones de docentes de primaria en formación (Elena Castro-Rodríguez • Luis Rico) Uniciencia is protected by Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-NC-ND 3.0)