REVISTA DE MATEMÁTICA: TEORÍA Y APLICACIONES 2018 **25**(2) : 347–365
CIMPA – UCR ISSN: 1409-2433 (PRINT), 2215-3373 (ONLINE)
DOI: https://doi.org/10.15517/rmta.v25i2.33908

CICLOS HAMILTONIANOS QUE PASAN A TRAVÉS DE UN BOSQUE LINEAL EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS

HAMILTONIAN CYCLES THAT PASS THROUGH A LINEAR FOREST OF BALANCED BIPARTITE GRAPHS

DANIEL BRITO* LOPE MARÍN† HENRY RAMÍREZ‡

Received: 2/Feb/2018; Revised: 5/Jun/2018;
Accepted: 7/Jun/2018

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones is licensed under a Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartirigual 4.0 International License.
Creado a partir de la obra en http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela. E-Mail: danieljosb@gmail.com

†Misma dirección que/*Same address as:* D. Brito. E-Mail: lmata73@gmail.com

‡Departamento de Higiene y Seguridad Laboral, Universidad Politécnica Clodosbaldo Russián, Cumaná, Venezuela. E-Mail: hlramirez6@hotmail.com

Resumen

Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito con $|A| = |B| = n \geq 4$. Un grafo es un bosque lineal si cada componente es un camino. Sea S un conjunto de m lados de G que induce un bosque lineal. Probaremos que si $\sigma_{1,1}(G) = min\{d_G(u) + d_G(v) : u \in A, v \in B, uv \notin E(G)\} \geq (n+1)+m$, entonces G contiene $(m+1)$ ciclos hamiltonianos C_j tal que $|E(C_j) \cap S| = j$, con $j = 0, 1, \ldots, m$.

Palabras clave: grafo bipartito; bosque lineal; ciclo hamiltoniano.

Abstract

Let $G = (A \cup B, E)$ be a bipartite graph whith $|A| = |B| = n \geq 4$. A graph is linear forest if every component is a path. Let S be a set of m edges of G that induces a linear forest. We prove that if $\sigma_{1,1}(G) = min\{d_G(u) + d_G(v) : u \in A, v \in B, uv \notin E(G)\} \geq (n + 1) + m$, then G contains $(m + 1)$ hamiltonian cycles C_j such that $|E(C_j) \cap S| = j$, with $j = 0, 1, \ldots, m$.

Keywords: bipartite graph; linear forest; hamiltonian cycle.

Mathematics Subject Classification: 05C07, 05C12, 05C45, 05C69.

1 Introducción

Un grafo G, es un par de conjuntos (V, E), denotado por $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices o nodos y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V, llamados lados o aristas; si G no posee lazos ni lados múltiples es un grafo simple. Un grafo es hamiltoniano, si tiene un ciclo que contiene todos los vértices del grafo sin repetir ninguno. Un árbol, es un grafo conexo (para cualquier par de vértices diferentes existe un camino que los une) que no contiene ciclos y un bosque es un grafo no conexo cuyas componentes son arboles. Sea $G = (V, E)$ un grafo, si V puede particionarse en dos conjuntos A y B, diferentes del vacío, tal que no existan adyacencias entre vértices del mismo conjunto de partición, se dice que G es un grafo bipartito y se denota por $G = (A \cup B, E)$, donde $V = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$; si además $|A| = |B|$, G es un grafo bipartito balanceado. Se consideran en este artículo únicamente grafos bipartitos balanceados $G = (A \cup B, E)$ simples y finitos, y para la terminología estandar de teoría de grafos no explicada en este artículo, referimos al lector a [2] y [4]. Para $u \in V(G)$, $N_G(u)$ denota el conjunto de vecinos de u en G y $d_G(u) = |N_G(u)|$ el grado de u en G; además, $\sigma_{1,1}(G) = min\{d_G(u) + d_G(v) : u \in A, v \in B, uv \notin E(G)\}$, es la mínima suma de los grados de dos vértices independientes, en clases distintas de G.

Para un subconjunto R de $E(G)$, $G[R]$ denota el subgrafo de G inducido por R y para un subgrafo T de G, $N_T(u) = N_G(u) \cap V(T)$, para cualquier $u \in V(G)\backslash V(T)$. Sea C un ciclo de G, con la orientación dada por $\overrightarrow{C}$. Para $u, v \in V(C)$, $u\overrightarrow{C}v$ denota el camino de u hasta v en $\overrightarrow{C}$, $u\overleftarrow{C}v$ la secuencia reversa de $u\overrightarrow{C}v$, $d(u,v)$ la distancia de u hasta v en C, $C[u,v]$ ($C[u,v)$, $C(u,v]$, $C(u,v)$) el subgrafo que va desde u hasta v (desde u hasta v^-, desde u^+ hasta v, desde u^+ hasta v^-, respectivamente) en $\overrightarrow{C}$. Para $u \in V(C)$, denotamos el h-ésimo sucesor y el h-ésimo predecesor de un vértice u por u^{+h} y u^{-h} respectivamente. Si $h = 1$, $u^{+1} = u^+$ y $u^{-1} = u^-$; además, $N_C^+(u)$ y $N_C^-(u)$ denotan, respectivamente, el conjunto de sucesores y antecesores de u en C. Un bosque lineal es un grafo donde cada componente es un camino. Sean $S \subseteq E(G)$, tal que $F = G[S]$ es un bosque lineal, y C un ciclo de $G = (A \cup B, E)$. Definamos

$$
\begin{aligned}
S_A &= \{u_iu_i^+ \in E(C) \cap S : u_i \in A\},\\
S_B &= \{u_ju_j^+ \in E(C) \cap S : u_j \in B\}, \text{ tal que } S_A \cup S_B \subseteq S,\\
Y_A &= \{u_i \in V(C) \cap A : u_iu_i^+ \in S_A\},\\
Y_B &= \{u_j \in V(C) \cap B : u_ju_j^+ \in S_B\}, \text{ tal que } Y = Y_A \cup Y_B,\\
T_A &= \{u_i^+ \in V(C) \cap A : u_iu_i^+ \in S_B\},\\
T_B &= \{u_j^+ \in V(C) \cap B : u_ju_j^+ \in S_A\}, \text{ tal que } T = T_A \cup T_B,\\
Z_A &= A\backslash Y_A,\\
Z_B &= B\backslash Y_B, \text{ tal que } Z = Z_A \cup Z_B,\\
q &= |S \setminus E(H)|,\\
\varphi &= Z\backslash T,\\
\Omega &= Y\backslash(Y \cap T),\\
N_Z^*(y) &= \{t \in Z :\ yt \in E(G)\backslash S, d_H(y,t) \geq 3\},\\
N_\varphi^*(y^+) &= \{t \in \varphi :\ y^+t \in E(G)\backslash S, d_H(y^+,t) \geq 3\}, \text{con } yy^+ \in E(C) \cap S.
\end{aligned}
$$

Posa, en [3], garantizó la existencia de un ciclo hamiltoniano que contiene cada lado de un conjunto de lados, de un grafo, que induce un bosque lineal, con el siguiente enunciado:

Teorema 1 ([3]) *Sean m un entero no negativo, G un grafo de orden n, con $n \geq 3$, y S un conjunto de m lados de G que induce un bosque lineal. Si $d_G(x) + d_G(y) \geq n + m$ para cualquier par de vértices no adyacentes x y y, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano que incluye todo lado de S.*

Utilizando el teorema anterior, Sugiyama, en [4], demostró en grafos, la existencia de ciclos hamiltonianos, los cuales tienen un número específico de lados de un bosque lineal, como sigue:

Teorema 2 ([4]) *Sean m un entero no negativo, G un grafo de orden n, con $n \geq 5$, y S un conjunto de m lados de G que induce un bosque lineal. Si $d_G(x) + d_G(y) \geq n + m$ para cualquier par de vértices no adyacentes x y y, entonces G contiene ciclos hamiltonianos que incluye todo lado de S desde 0 hasta m.*

Siguiendo esta misma idea, usando grafos bipartitos balanceados, de orden $2n$, que contienen conjuntos S de m lados que inducen un bosque lineal, en este artículo probamos que si $\sigma_{1,1} \geq (n+1) + m$, entonces existen $(m+1)$ ciclos hamiltonianos C_j tal que $|E(C_j) \cap S| = j$, para cada j desde 0 hasta m; apoyándonos en los resultados obtenidos en [1] y [5] respectivamente y en los siguientes lemas.

Teorema 3 (A, [1]) *Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y $k \geq 2$. Si $\sigma_{1,1}(G) \geq n + k$, entonces G es $(k+1)$-conexo.*

Teorema 4 (B, [5]) *Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y S un conjunto de m lados de G, con $m \geq 1$, que induce un bosque lineal. Si $\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1) + m$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano que pasa a través de todos los lados de S.*

2 Lemas

Lema 1 *Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y S un conjunto de m lados de G, con $m \geq 1$, que induce un bosque lineal. Sean $\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1) + m$ y H un ciclo hamiltoniano de G donde $|E(H) \cap S| = l$. Si existen $u_i \in Y$ y $u_j \in Z$, tal que $d_H(u_i, u_j) \geq 3$, $u_i u_j \in E(G) \backslash S$ y $u_i^+ u_j^+ \notin S$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano C en el cual $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u_i^+ \notin E(C)$.*

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y S un conjunto de m lados de G, con $m \geq 1$, que induce un bosque lineal. Supongamos $\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1) + m$, y sea $H := u_1 u_2 \cdots u_{2n-1} u_{2n} u_1$ un ciclo hamiltoniano de G, donde $|E(H) \cap S| = l$, con $1 \leq l \leq m$.

Consideremos, sin pérdida de generalidad, que $u_i = u_1 \in Y_A$ y $u_j \in Z_B$, tal que

$$u_i u_j \in E(G) \backslash S \quad \text{y} \quad d_H(u_i, u_j) \geq 3.$$

Si $u_i^+ u_j^+ \in E(G) \backslash S$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano

$$C := u_i \overleftarrow{H} u_j^+ u_i^+ \overrightarrow{H} u_j u_i,$$

tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u_i^+ \notin E(C)$. Por lo tanto, supongamos que $u_i^+ u_j^+ \notin E(G)$; por consiguiente,

$$d_G(u_i^+) + d_G(u_j^+) \geq (n+1) + m.$$

Sean $G_1 {=} (V(G_1), E(G_1))$, con $V(G_1) {=} V(G)$ y $E(G_1) = E(G) \backslash \{S \backslash E(H)\}$ y $\alpha = min\{q, 3\}$. Entonces

$$d_{G_1}(u_i^+) + d_{G_1}(u_j^+) \geq (n+1) + m - \alpha.$$

Considérense los subgrafos $C_1 = H[u_i^{+2}, u_j]$ y $C_2 = H[u_j^{+2}, u_i]$ de H en G_1, ver Figura 1.

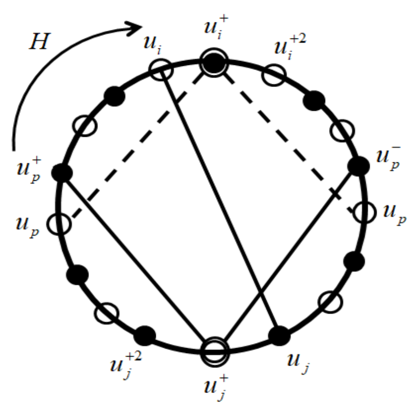

Figura 1: Representa la partición del ciclo H en C_1 y C_2.

Entonces, se tienen las siguientes desigualdades,

- $$\begin{aligned} |N_{C_1}(u_i^+) \cap N_{C_1}^+(u_j^+)| &= (|N_{C_1}(u_i^+)| + |N_{C_1}^+(u_j^+| \\ &- |N_{C_1}(u_i^+) \cup N_{C_1}^+(u_j^+)|) \\ &\geq |N_{C_1}(u_i^+)| + |N_{C_1}^+(u_j^+)| - \tfrac{|V(C_1)|}{2} \\ &= |N_{C_1}(u_i^+)| + (|N_{C_1}(u_j^+)| - 1) - \tfrac{|V(C_1)|}{2}, \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} |N_{C_2}(u_i^+) \cap N_{C_2}^-(u_j^+)| &= (|N_{C_2}(u_i^+)| + |N_{C_2}^-(u_j^+)| \\ &- |N_{C_2}(u_i^+) \cup N_{C_2}^-(u_j^+)|) \\ &\geq |N_{C_2}(u_i^+)| + |N_{C_2}^-(u_j^+)| - \tfrac{|V(C_2)|}{2} \\ &= |N_{C_2}(u_i^+)| + (|N_{C_2}(u_j^+)| - 1) - \tfrac{|V(C_2)|}{2}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} |N_{C_1}(u_i^+) \cap N_{C_1}^+(u_j^+)| + |N_{C_2}(u_i^+) \cap N_{C_2}^-(u_j^+)| &\geq \\ (|N_{C_1}(u_i^+)| + |N_{C_2}(u_i^+)|) + ((|N_{C_1}(u_j^+)| - 1) + & \\ (|N_{C_2}(u_j^+)| - 1)) - (\frac{|V(C_1)| + |V(C_2)|}{2}) &= \\ d_{G_1}(u_i^+) + d_{G_1}(u_j^+) - 2 - (n-1) &\geq \\ n + 1 + m - \alpha - n - 2 + 1 &= m - \alpha. \end{aligned}$$

Puesto que $q \geq \alpha$,

$$|N_{C_1}(u_i^+) \cap N_{C_1}^+(u_j^+)| + |N_{C_2}(u_i^+) \cap N_{C_2}^-(u_j^+)| \geq m - q = l.$$

Como $u_i \notin \{N_{C_1}(u_i^+) \cap N_{C_1}^+(u_j^+)\} \cup \{N_{C_2}(u_i^+) \cap N_{C_2}^-(u_j^+)\}$, existe al menos un vértice $u_p \in \{N_{C_1}(u_i^+) \cap N_{C_1}^+(u_j^+)\} \cup \{N_{C_2}(u_i^+) \cap N_{C_2}^-(u_j^+)\}$ tal que $u_p \notin Y_A$. Por consiguiente:

- Si $u_p \in \{N_{C_1}(u_i^+) \cap N_{C_1}^+(u_j^+)\}$, entonces G_1 contiene un ciclo hamiltoniano
$$C := u_i \overleftarrow{H} u_j^+ u_p^- \overleftarrow{H} u_i^+ u_p \overrightarrow{H} u_j u_i,$$
tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u_i^+ \notin E(C)$.

- Si $u_p \in \{N_{C_2}(u_i^+) \cap N_{C_2}^-(u_j^+)\}$, entonces G_1 contiene un ciclo hamiltoniano
$$C := u_i \overleftarrow{H} u_p^+ u_j^+ \overrightarrow{H} u_p u_i^+ \overrightarrow{H} u_j u_i,$$
tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u_i^+ \notin E(C)$.

Como G_1 es un subgrafo de G, G contiene un ciclo hamiltoniano C tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u_i^+ \notin E(C)$. ■

Lema 2 *Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y S un conjunto de m lados de G, con $m \geq 1$, que induce un bosque lineal. Sean $\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1) + m$ y H un ciclo hamiltoniano de G, donde $|E(H) \cap S| = l$, con $1 \leq l \leq m$. Si existen $u_i, u_t, u_k \in V(H)$ tal que $H[u_i^+, u_i] = u_i^+ \overrightarrow{H} u_k \overrightarrow{H} u_t \overrightarrow{H} u_i$, donde $u_i \in Y$, $u_t \in Z$, $u_k^- \in Z$, $d_H(u_i, u_t) \geq 3$, $d_H(u_i^+, u_k) \geq 3$, $u_i u_t \in E(G) \backslash S$, $u_i^+ u_k \in E(G) \backslash S$ y $u_k^- u_t^+ \notin S$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano C en el cual $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u_i^+ \notin E(C)$.*

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y S un conjunto de m lados de G, con $m \geq 1$, que induce un bosque lineal. Supongamos que $\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1) + m$, y sea $H := u_1 u_2 \cdots u_{2n-1} u_{2n} u_1$ un ciclo hamiltoniano de G, donde $|E(H) \cap S| = l$, con $1 \leq l \leq m$. Consideremos que existen $u_i, u_t, u_k \in V(H)$ tal que $H[u_i^+, u_i] = u_i^+ \overrightarrow{H} u_k \overrightarrow{H} u_t \overrightarrow{H} u_i$, donde, sin pérdida de generalidad, $u_i = u_1 \in Y_A$, $u_t \in Z_B$, $u_k^- \in Z_B$,

$$d_H(u_i^+, u_k) \geq 3,$$

$$d_H(u_i, u_t) \geq 3,$$

con $u_i u_t \in E(G) \backslash S$ y $u_i^+ u_k \in E(G) \backslash S$. Si $u_k^- u_t^+ \in E(G) \backslash S$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano

$$C = u_i \overleftarrow{H} u_t^+ u_k^- \overleftarrow{H} u_i^+ u_k \overrightarrow{H} u_t u_i,$$

tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u_i^+ \notin E(C)$. Por lo tanto, supongamos que $u_k^- u_t^+ \notin E(G)$; por consiguiente,

$$d_G(u_k^-) + d_G(u_t^+) \geq (n+1) + m.$$

Sean $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$, con $V(G) = V(G_2)$ y $E(G_2) = E(G) \backslash \{S \backslash E(H)\}$ y $\alpha = min\{q, 4\}$. Entonces

$$d_{G_2}(u_k^-) + d_{G_2}(u_t^+) \geq (n+1) + m - \alpha.$$

Si $u_t^+ u_i^+ \in E(G_2)$ y $u_k^- u_i \in E(G_2)$, entonces en ambos casos, por el Lema 1, existe en G_2 un ciclo hamiltoniano C tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u_i^+ \notin E(C)$. En consecuencia, supongamos que $u_i u_k^- \notin E(G_2)$ y $u_i^+ u_t^+ \notin E(G_2)$.

Considérese los subgrafos $C_1 = H[u_i^+, u_k^{-2}]$, $C_2 = H[u_k, u_t]$ y $C_3 = H[u_t^{+2}, u_i]$ de H en G_2, ver Figura 2.

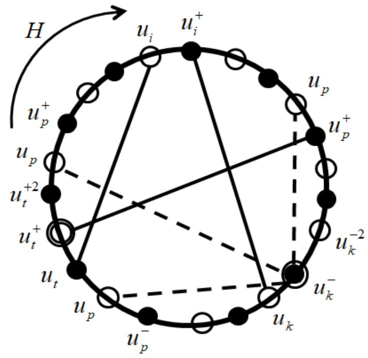

Figura 2: Representa la partición del ciclo H en C_1, C_2 y C_3.

Entonces, se obtienen las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned}
\bullet|N^-_{C_1}(u_t^+) \cap N_{C_1}(u_k^-)| &= (|N^-_{C_1}(u_t^+)| + |N_{C_1}(u_k^-)| \\
&- |N^-_{C_1}(u_t^+) \cup N_{C_1}(u_k^-)|) \\
&\geq |N^-_{C_1}(u_t^+)| + |N_{C_1}(u_k^-)| - \tfrac{|V(C_1)|}{2} \\
&= |N_{C_1}(u_t^+)| + |N_{C_1}(u_k^-)| - \tfrac{|V(C_1)|}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet|N^+_{C_2}(u_t^+) \cap N_{C_2}(u_k^-)| &= |N^+_{C_2}(u_t^+)| + |N_{C_2}(u_k^-)| \\
&- |N^+_{C_2}(u_t^+) \cup N_{C_2}(u_k^-)| \\
&\geq |N^+_{C_2}(u_t^+)| + |N_{C_2}(u_k^-)| - \tfrac{|V(C_2)|}{2} \\
&= (|N_{C_2}(u_t^+)| - 1) + |N_{C_2}(u_k^-)| - \tfrac{|V(C_2)|}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet|N^-_{C_3}(u_t^+) \cap N_{C_3}(u_k^-)| &= |N^-_{C_3}(u_t^+)| + |N_{C_3}(u_k^-)| \\
&- |N^-_{C_3}(u_t^+) \cup N_{C_3}(u_k^-)| \\
&\geq |N^-_{C_3}(u_t^+)| + |N_{C_3}(u_k^-)| - \tfrac{|V(C_3)|}{2} \\
&= (|N_{C_3}(u_t^+)| - 1) + |N_{C_3}(u_k^-)| - \tfrac{|V(C_3)|}{2}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
|N^-_{C_1}(u^+_t)\cap N_{C_1}(u^-_k)| + |N^+_{C_2}(u^+_t)\cap N_{C_2}(u^-_k)| + |N^-_{C_3}(u^+_t)\cap N_{C_3}(u^-_k)| &\geq \\
d_{G_2}(u^+_t) + d_{G_2}(u^-_k) - 2 - \left(\frac{|V(C_1)| + |V(C_2)| + |V(C_3)|}{2}\right) &= \\
d_{G_2}(u^+_t) + d_{G_2}(u^-_k) - 2 - (n-1) &\geq \\
n + 1 + m - \alpha - n + 1 - 2 &= \\
m - \alpha. &
\end{aligned}$$

Puesto que $q \geq \alpha$,

$$|N^-_{C_1}(u^+_t)\cap N_{C_1}(u^-_k)| + |N^+_{C_2}(u^+_t)\cap N_{C_2}(u^-_k)| + |N^-_{C_3}(u^+_t)\cap N_{C_3}(u^-_k)| \geq m - q = l.$$

Como $u_i \notin \{N^-_{C_1}(u^+_t)\cap N_{C_1}(u^-_k)\}\cup\{N^+_{C_2}(u^+_t)\cap N_{C_2}(u^-_k)\}\cup\{N^-_{C_3}(u^+_t)\cap N_{C_3}(u^-_k)\}$, existe al menos, un vértice

$$u_p \in \{N^-_{C_1}(u^+_t)\cap N_{C_1}(u^-_k)\}\cup\{N^+_{C_2}(u^+_t)\cap N_{C_2}(u^-_k)\}\cup\{N^-_{C_3}(u^+_t)\cap N_{C_3}(u^-_k)\},$$

tal que $u_p \notin Y_A$. Por consiguiente:

- Si $u_p \in \{N^-_{C_1}(u^+_t)\cap N_{C_1}(u^-_k)\}$, entonces G_2 contiene un ciclo hamiltoniano
$$C := u_i\overleftarrow{H}u^+_t u^+_p \overrightarrow{H} u^-_k u_p \overleftarrow{H} u^+_i u_k \overrightarrow{H} u_t u_i,$$
tal que $|E(C)\cap S| = l-1$ y $u_i u^+_i \notin E(C)$.

- Si $u_p \in \{N^+_{C_2}(u^+_t)\cap N_{C_2}(u^-_k)\}$, entonces G_2 contiene un ciclo hamiltoniano
$$C := u_i\overleftarrow{H}u^+_t u^-_p \overleftarrow{H} u_k u^+_i \overrightarrow{H} u^-_k u_p \overrightarrow{H} u_t u_i,$$
tal que $|E(C)\cap S| = l-1$ y $u_i u^+_i \notin E(C)$.

- Si $u_p \in \{N^-_{C_3}(u^+_t)\cap N_{C_3}(u^-_k)\}$, entonces G_2 contiene un ciclo hamiltoniano
$$C := u_i\overleftarrow{H}u^+_p u^+_t \overrightarrow{H} u_p u^-_k \overleftarrow{H} u^+_i u_k \overrightarrow{H} u_t u_i,$$
tal que $|E(C)\cap S| = l-1$ y $u_i u^+_i \notin E(C)$.

Como G_2 es un subgrafo de G, G contiene un ciclo hamiltoniano C tal que $|E(C)\cap S| = l-1$ y $u_i u^+_i \notin E(C)$. ■

Lema 3 *Sean* $G = (A \cup B, E)$ *un grafo bipartito balanceado de orden* $2n$*, con* $n \geq 4$*, y* S *un conjunto de* m *lados de* G*, con* $m \geq 1$*, que induce un bosque lineal. Sean* $\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1) + m$ *y* H *un ciclo hamiltoniano de* G*, donde* $|E(H) \cap S| = l$*, con* $1 \leq l \leq m$*. Si existen* $u_i, u_t, u_k \in V(H)$*, tal que* $H[u_i^+, u_i]{=}u_i^+\overrightarrow{H}u_t\overrightarrow{H}u_k\overrightarrow{H}u_i$*, donde* $u_i \in Y$*,* $u_t \in Z$*,* $u_k \in Z$*,* $d_H(u_i, u_t) \geq 3$*,* $d_H(u_i^+, u_k) \geq 3$*;* $u_iu_t \in E(G)\backslash S$*,* $u_i^+u_k \in E(G)\backslash S$ *y* $u_k^+u_t^+ \notin S$*, entonces* G *contiene un ciclo hamiltoniano* C *en el cual* $|E(C) \cap S| = l-1$ *y* $u_iu_i^+ \notin E(C)$*.*

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y S un conjunto de m lados de G, con $m \geq 1$, que induce un bosque lineal. Supongamos que $\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1)+m$, y sea $H{:=}\ u_1u_2 \cdots u_{2n-1}u_{2n}u_1$ un ciclo hamiltoniano de G, donde $|E(H) \cap S| = l$, con $1 \leq l \leq m$. Consideremos que existen $u_i, u_t, u_k \in V(H)$, tal que $H[u_i^+, u_i] = u_i^+\overrightarrow{H}u_t\overrightarrow{H}u_k\overrightarrow{H}u_i$, donde, sin pérdida de generalidad, $u_i = u_1 \in Y_A$, $u_t \in Z_B$ y $u_k \in Z_A$,

$$d_H(u_i^+, u_k) \geq 3,$$

$$d_H(u_i, u_t) \geq 3,$$

con $u_iu_t \in E(G)\backslash S$ y $u_i^+u_k \in E(G)\backslash S$. Si $d_H(u_t, u_k) < 3$, entonces por el Lema 1, existe en G un ciclo hamiltoniano C tal que, $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_iu_i^+ \notin E(C)$. Por consiguiente, consideremos que $d_H(u_i^+, u_k) \geq 3$ y $d_H(u_t, u_k) \geq 3$.

Si $u_k^+u_t^+ \in E(G)\backslash S$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano

$$C =: u_i\overleftarrow{H}u_k^+u_t^+\overrightarrow{H}u_ku_i^+\overrightarrow{H}u_tu_i,$$

tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_iu_i^+ \notin E(C)$. Por lo tanto, supongamos que $u_k^+u_t^+ \notin E(G)$; por consiguiente,

$$d_G(u_k^+) + d_G(u_t^+) \geq (n+1) + m.$$

Sean $G_3 = (V(G_3), E(G_3))$, con $V(G) = V(G_3)$ y $E(G_3) = E(G)\backslash\{S\backslash E(H)\}$ y $\alpha = min\{q, 4\}$. Entonces

$$d_{G_3}(u_k^+) + d_{G_3}(u_t^+) \geq (n+1) + m - \alpha.$$

Si $u_iu_k^- \in E(G_3)$ entonces, por el Lema 1, existe en G_3 un ciclo hamiltoniano C tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_iu_i^+ \notin E(C)$.

De igual forma, si $u_i^+u_t^+ \in E(G_3)$ entonces, por el Lema 1, existe en G_3 un ciclo hamiltoniano C tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_iu_i^+ \notin E(C)$. Así, supongamos que $u_iu_k^- \notin E(G_3)$ y $u_i^+u_t^+ \notin E(G_3)$.

Considérese los subgrafos $C_1 = H[u_i^+, u_t]$, $C_2 = H[u_t^{+2}, u_k]$ y $C_3 = H[u_k^{+2}, u_i]$ de H en G_3.

Entonces, se obtienen las siguientes desigualdades,

$$\begin{array}{rcl}
\bullet|N^-_{C_1}(u_t^+) \cap N_{C_1}(u_k^+)| & = & (|N^-_{C_1}(u_t^+)| + |N_{C_1}(u_k^+)| \\
& - & |N^-_{C_1}(u_t^+) \cup N_{C_1}(u_k^+)|) \\
& \geq & |N^-_{C_1}(u_t^+)| + |N_{C_1}(u_k^+)| - \frac{|V(C_1)|-1}{2} \\
& = & |N_{C_1}(u_t^+)| + |N_{C_1}(u_k^+)| - \frac{|V(C_1)|-1}{2},
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\bullet|N^-_{C_2}(u_t^+) \cap N_{C_2}(u_k^+)| & = & (|N^-_{C_2}(u_t^+)| + |N_{C_2}(u_k^+)| \\
& - & |N^-_{C_2}(u_t^+) \cup N_{C_2}(u_k^+)|) \\
& \geq & |N^-_{C_2}(u_t^+)| + |N_{C_2}(u_k^+)| - \frac{|V(C_2)|}{2} \\
& = & (|N_{C_2}(u_t^+)| - 1) + |N_{C_2}(u_k^+)| - \frac{|V(C_2)|}{2},
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\bullet|N^+_{C_3}(u_t^+) \cap N_{C_3}(u_k^+)| & = & (|N^+_{C_3}(u_t^+)| + |N_{C_3}(u_k^+)| \\
& - & |N^+_{C_3}(u_t^+) \cup N_{C_3}(u_k^+)|) \\
& \geq & |N^+_{C_3}(u_t^+)| + |N_{C_3}(u_k^+)| - \frac{|V(C_3)|+1}{2} \\
& = & |N_{C_3}(u_t^+)| + |N_{C_3}(u_k^+)| - \frac{|V(C_3)|+1}{2}.
\end{array}$$

Así,

$$\begin{array}{rcl}
|N^-_{C_1}(u_t^+) \cap N_{C_1}(u_k^+)| + |N^-_{C_2}(u_t^+) \cap N_{C_2}(u_k^+)| & & \\
+|N^+_{C_3}(u_t^+) \cap N_{C_3}(u_k^+)| & \geq & \\
d_{G_3}(u_t^+) + d_{G_3}(u_k^+) - 1 & & \\
-\left(\dfrac{(|V(C_1)| - 1) + |V(C_2)| + |V(C_3)| + 1}{2}\right) & = & \\
d_{G_3}(u_t^+) + d_{G_3}(u_k^+) - 1 - (n-1) & \geq & \\
n + 1 + m - \alpha - n - 1 + 1 & = & m - \alpha + 1.
\end{array}$$

Puesto que $q \geq \alpha$,

$$\begin{array}{rcl}
|N^-_{C_1}(u_t^+) \cap N_{C_1}(u_k^+)| + |N^-_{C_2}(u_t^+) \cap N_{C_2}(u_k^+)| & & \\
+|N^+_{C_3}(u_t^+) \cap N_{C_3}(u_k^+)| & \geq & m - q + 1 \\
& = & l + 1.
\end{array}$$

En consecuencia, existe al menos, un vértice

$$u_p \in \{N^-_{C_1}(u_t^+) \cap N_{C_1}(u_k^+)\} \cup \{N^-_{C_2}(u_t^+) \cap N_{C_2}(u_k^+)\} \cup \{N^+_{C_3}(u_t^+) \cap N_{C_3}(u_k^+)\},$$

tal que $u_p \notin Y_A$. Por consiguiente:

- Si $u_p \in \{N^-_{C_1}(u^+_t) \cap N_{C_1}(u^+_k)\}$, entonces G_3 contiene un ciclo hamiltoniano
$$C := u_i\overleftarrow{H}u^+_k u_p\overleftarrow{H}u^+_i u_k\overleftarrow{H}u^+_t u^+_p\overrightarrow{H}u_t u_i,$$
tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u^+_i \notin E(C)$.

- Si $u_p \in \{N^-_{C_2}(u^+_t) \cap N_{C_2}(u^+_k)\}$, entonces G_3 contiene un ciclo hamiltoniano
$$C := u_i\overleftarrow{H}u^+_k u_p\overleftarrow{H}u^+_t u^+_p\overrightarrow{H}u_k u^+_i\overrightarrow{H}u_t u_i,$$
tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u^+_i \notin E(C)$.

- Si $u_p \in \{N^+_{C_3}(u^+_t) \cap N_{C_3}(u^+_k)\}$, entonces G_3 contiene un ciclo hamiltoniano
$$C := u_i\overleftarrow{H}u_p u^+_k\overrightarrow{H}u^-_p u^+_t\overrightarrow{H}u_k u^+_i\overrightarrow{H}u_t u_i,$$
tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u^+_i \notin E(C)$.

Como G_3 es un subgrafo de G, G contiene un ciclo hamiltoniano C tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u^+_i \notin E(C)$. ■

Si en el Lema 3, se toma la secuencia reversa del ciclo H, y existen $u_i, u_t, u_k \in V(H)$, tal que
$$H[u^+_i, u_i] = u^+_i\overrightarrow{H}u_t\overrightarrow{H}u_k\overrightarrow{H}u_i,$$
donde $u_i \in Y$, $u^-_t \in Z$, $u^-_k \in Z$, $d_H(u_i, u_t) \geq 3$, $d_H(u^+_i, u_k) \geq 3$; $u_i u_t \in E(G)\backslash S$, $u^+_i u_k \in E(G)\backslash S$ y $u^-_k u^-_t \notin S$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano C en el cual $|E(C) \cap S| = l - 1$ y $u_i u^+_i \notin E(C)$.

3 Proposición

Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 5$, y S un conjunto de m lados de G, con $m \geq 1$, que induce un bosque lineal. Sean $\sigma_{1,1}(G) \geq (n + 1) + m$ y H un ciclo hamiltoniano de G, donde $|E(H) \cap S| = l$, con $1 \leq l \leq m$. Si existen $u_i, z_1, z_2, z_3 \in V(H)$ tal que $H[u^+_i, u_i] = u^+_i\overrightarrow{H}z_1\overrightarrow{H}z_2\overrightarrow{H}z_3\overrightarrow{H}u_i$, donde $u_i \in Y$, $z_j \in Z$, $u_i z_j \in E(G)$ y $d_H(u_i, z_j) \geq 3$ para toda $j \in \{1, 2, 3\}$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano C en el cual $|E(C) \cap S| = l - 1$.

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y S un conjunto de m lados de G, con $m \geq 1$, que induce un bosque lineal. Supongamos que

$$\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1) + m,$$

y sea $H := u_1u_2 \cdots u_{2n-1}u_{2n}u_1$ un ciclo hamiltoniano de G, donde $|E(H) \cap S| = l$, con $1 \leq l \leq m$. Sean, sin pérdida de generalidad,

$$u_i \in Y_A \quad \text{y} \quad z_j \in Z_B, \quad \text{tal que} \quad u_iz_j \in E(G) \quad \text{y} \quad d_H(u_i, z_j) \geq 3; \ \forall j \in \{1, 2, 3\},$$

con $H[u_i^+, u_i] = u_i^+ \overrightarrow{H} z_1 \overrightarrow{H} z_2 \overrightarrow{H} z_3 \overrightarrow{H} u_i$. Como $u_iu_i^+ \in S$ y S induce un bosque lineal, $u_iz_j \in E(G) \backslash S$, excepto para algún $j \in \{1, 2, 3\}$. Sea, sin pérdida de generalidad, $u_iz_3 \in S$ y consideremos los siguientes casos:

$*$ Caso 1. $u_i^+z_j^+ \notin S$, para toda $j \in \{1, 2\}$.

Como $u_i^+z_j^+ \notin S$, para toda $j \in \{1, 2\}$, supongamos que $u_i^+z_j^+ \notin E(G)$, para toda $j \in \{1, 2\}$; en caso contrario, por el Lema 1, se obtiene el ciclo hamiltoniano deseado. Entonces, como

$$\delta(G) \geq m + 2,$$

existe $u_\beta \in N(u_i^+)$ tal que, sin pérdida de generalidad,

$$u_\beta \in H(u_i^{+2}, z_1^+) \cup H(z_1^+, u_i^-).$$

Por hipótesis, $z_1^+u_\beta^+ \in E(G)$ si $u_\beta \in H(z_1^+, u_i^-)$ o $z_1^+u_\beta^- \in E(G)$ si $u_\beta \in H(u_i^{+2}, z_1^+)$; en ambos casos, se encuentra el ciclo hamiltoniano deseado, utilizando el Lema 3 o el Lema 2, según sea el caso.

$*$ Caso 2. $u_i^+z_j^+ \in S$, para algún $j \in \{1, 2\}$.

Como $u_i^+z_j^+ \in S$, para algún $j \in \{1, 2\}$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $u_i^+z_2^+ \in S$. Sea $u_i^+z_1^+ \notin E(G)$; en caso contrario, por el Lema 1, se obtiene el ciclo hamiltoniano deseado. Entonces, como

$$\delta(G) \geq m + 2,$$

existe $u_\beta \in N(u_i^+)$ tal que

$$u_\beta \in H(u_i^{+2}, z_1^+) \cup H(z_1^+, u_i^-).$$

Por hipótesis, $z_1^+u_\beta^+ \in E(G)$ si $u_\beta \in H(z_1^+, u_i^-)$ o $z_1^+u_\beta^- \in E(G)$ si $u_\beta \in H(u_i^{+2}, z_1^+)$; en ambos casos, se encuentra el ciclo hamiltoniano deseado, utilizando el Lema 3 o el Lema 2, según sea el caso. ■

4 Teorema principal

Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y S un conjunto de m lados que induce un bosque lineal. Si $\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1)+m$, entonces G contiene $(m+1)$ ciclos hamiltonianos C_j tal que $|E(C_j) \cap S| = j$, con $j = 0, 1, \cdots, m$.

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $n \geq 4$, y S un conjunto de m lados de G, con $m \geq 1$, que induce un bosque lineal. Supongamos que

$$\sigma_{1,1}(G) \geq (n+1) + m,$$

entonces por el Teorema B, G contiene un ciclo hamiltoniano H que contiene todos los lados de S. Demostraremos que si G contiene un ciclo hamiltoniano H de G tal que $|E(H) \cap S| = l$, con $1 \leq l \leq m$, entonces existe un ciclo hamiltoniano C de G tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$. Supongamos, que G contiene un ciclo hamiltoniano H de G tal que $|E(H) \cap S| = l$. Como

$$d_G(u) + d_G(v) \geq (n+1) + m,$$

para todo par de vértices independientes $u \in A$ y $v \in B$, y además,

$$d_G(u) \leq n-1 \quad \text{y} \quad d_G(v) \leq n-1;$$

entonces $m \leq n-3$.

Consideremos primeramente $q = |S \setminus E(H)| = 0$.

Como $q = 0$, $m \leq n-3$ y $n \geq 4$, $|E(H) \setminus S| \geq 7$. En consecuencia, existen $y \in Y$ y $z \in Z$ tal que $d_H(y,z) \geq 3$.

Si $yz, y^+z^+ \in E(G)$, entonces, por el Lema 1, existe un ciclo hamiltoniano C de G tal que

$$|E(C) \cap S| = l-1 \quad \text{y} \quad yy^+ \notin E(C).$$

Por lo tanto, consideremos sólo el caso $yz \notin E(G)$ o $y^+z^+ \notin E(G)$.

En general, para ambos casos, consideremos cualquier z en $H(y^{+2}, y^{-2})$.

Como $\delta(G) \geq m+2$, existe

$$u_\alpha \in H(y^{+2}, z) \cup H(z, y^{-2}),$$

tal que $u_\alpha \in N(y)$ ($u_\alpha y \in E(G) \backslash S$, puesto que $q = 0$) y, además, existe un

$$u_\beta \in H(y^{+2}, y^{-2}],$$

tal que $u_\beta \in N(y^+)$ ($u_\beta y^+ \in E(G) \backslash S$, puesto que $q = 0$). Entonces se cumplen al menos uno de los siguientes casos:

i) Si $u_\beta = u_\alpha^+$, usando el Lema 1, $C := y^+\overrightarrow{H}u_\alpha y\overleftarrow{H}u_\alpha^+y^+$ es un ciclo hamiltoniano de G tal que $|E(C)\cap S| = l-1$ y $yy^+ \notin E(C)$.

ii) Si $u_\beta \neq u_\alpha^+$, $y^+u_\alpha^+ \notin E(G)$; así, $u_\beta \in H(y^{+2}, u_\alpha^+) \cup H(u_\alpha^+, y^{-2}]$. Por hipótesis, $u_\alpha^+u_\beta^- \in E(G)\backslash S$ si $u_\beta \in H(y^{+2}, u_\alpha^+)$ o $u_\alpha^+u_\beta^+ \in E(G)\backslash S$ si $u_\beta \in H(u_\alpha^+, y^{-2}]$, en ambos casos, aplicando el Lema 2 o Lema 3 respectivamente, G contiene un ciclo hamiltoniano C tal que $|E(C)\cap S| = l-1$ y $yy^+ \notin E(C)$.

En ambos casos, existe $y \in Y$, $z \in Z$ tal que $yz \notin E(G)$.

Consideremos ahora $q = |S \setminus E(H)| \geq 1$. Como $q \geq 1$, $m \leq n-3$ y $n \geq 5$, $|E(H) \setminus S| \geq 9$. En consecuencia, para cualquier $y \in Y$, existen $z_1, z_2, z_3 \in Z$ tal que $d_H(y, z_i) \geq 3$, para todo $i = 1, 2, 3$.

Si $yz_i \in E(G)$, para todo $i = 1, 2, 3$, por la Proposición 1, G contiene un ciclo hamiltoniano C tal que

$$|E(C)\cap S| = l-1 \quad \text{y} \quad yy^+ \notin E(C).$$

De donde, consideremos sólo el caso donde al menos uno de los lados yz_1, yz_2 y yz_3 no está en $E(G)$.

Por consiguiente, para los casos $q = 0$ y $q \geq 1$, supongamos que existen $y \in Y$ y $z \in Z$ tal que $d_H(y, z) \geq 3$ y $yz \notin E(G)$.

Consideremos los siguientes casos:

- Caso 1. $S_A \neq \emptyset$ y $S_B = \emptyset$.
  Sean $S_A \neq \emptyset$ y $S_B = \emptyset$, con $y \in Y_A$ y $z \in Z_B$. Así

$$\begin{array}{rcl} |\{y^+, y^-\} \cap Z_B| & \leq & 2, \quad \text{y} \\ |\{z^+, z^-\} \cap Y_A| & \leq & |Y_A| - 1. \end{array}$$

  Por lo tanto,

$$|\{y^+, y^-\} \cap Z_B| + |\{z^+, z^-\} \cap Y_A| \leq |Y_A| + 1.$$

  Como, $yz \notin E(G)$,

$$\begin{array}{rcl} |N_Y(y)| + |N_Z(y)| + |N_Y(z)| + |N_Z(z)| & = & |N_{Y_B}(y)| + |N_{Z_B}(y)| \\ & & +|N_{Y_A}(z)| + |N_{Z_A}(z)| \\ & = & |N_G(y)| + |N_G(z)| \\ & = & d_G(y) + d_G(z) \\ & \geq & (n+1) + m. \end{array}$$

Por otro lado, como $|Y_B| = 0$;

$$\begin{aligned} |N_Y(y)| + |N_Z(z)| &= |N_{Y_B}(y)| + |N_{Z_A}(z)| \\ &\leq |Y_B| + |Z_A| \\ &= |Z_A|. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |N_Y(z)| + |N_Z(y)| &= |N_{Z_B}(y)| + |N_{Y_A}(z)| \\ &\geq (n+1) + m - |Z_A|. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} |N_{Y_A}(z)\backslash\{z^+, z^-\}| + |N_{Z_B}(y)\backslash\{y^+, y^-\}| &\geq ((n+1) + m - |Z_A|) \\ &- (|Y_A| + 1)) \\ &= n + 1 + m - n + |Y_A| \\ &- |Y_A| - 1 \\ &= m \\ &= q + |Y_A|. \end{aligned}$$

- Caso 2. $S_A \neq \emptyset$ y $S_B \neq \emptyset$.
  Sean $S_A \neq \emptyset$ y $S_B \neq \emptyset$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $y \in Y_A$, $z \in Z_B$, con

$$\begin{aligned} |Y_A| &\leq |Y_B| \quad \text{y} \\ |Z_B| &\leq |Z_A|. \end{aligned}$$

Entonces $|Y_A| + |Z_B| \leq n$; en efecto, como $|Y_B| = n - |Z_B|$, $|Y_A| \leq n - |Z_B|$; por lo tanto, $|Y_A| + |Z_B| \leq n$. En consecuencia, existe un entero $\epsilon = |Y_B| - |Y_A| \geq 0$, tal que $|Y_A| + |Z_B| = n - \epsilon$.

Así,

$$\begin{aligned} |\{y^+, y^-\} \cap Z_B| &\leq 2, \quad \text{y} \\ |\{z^+, z^-\} \cap Y_A| &\leq |Y_A| - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\{y^+, y^-\} \cap Z_B| + |\{z^+, z^-\} \cap Y_A| \leq |Y_A| + 1.$$

Como, $yz \notin E(G)$,

$$\begin{array}{rcl} |N_Y(y)|+|N_Z(y)|+|N_Y(z)|+|N_Z(z)| & = & |N_{Y_B}(y)|+|N_{Z_B}(y)| \\ & + & |N_{Y_A}(z)|+|N_{Z_A}(z)| \\ & = & |N_G(y)|+|N_G(z)| \\ & = & d_G(y)+d_G(z) \\ & \geq & (n+1)+m. \end{array}$$

Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} |N_Y(y)|+|N_Z(z)| & = & |N_{Y_B}(y)|+|N_{Z_A}(z)| \\ & \leq & |Y_B|+|Z_A| \\ & = & 2n-(|Z_B|+|Y_A|) \\ & = & n+\epsilon. \end{array}$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} |N_Y(z)|+|N_Z(y)| & = & |N_{Z_B}(y)|+|N_{Y_A}(z)| \\ & \geq & (n+1)+m-n-\epsilon \\ & = & m+1-\epsilon \\ & = & q+l+1-\epsilon \\ & = & (|Y_A|+|Y_B|)+q+1-\epsilon. \end{array}$$

En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} |N_{Y_A}(z)\setminus\{z^+,z^-\}| & & \\ +|N_{Z_B}(y)\setminus\{y^+,y^-\}| & \geq & (|Y_A|+|Y_B|+q+1-\epsilon) \\ & & -(|Y_A|+1) \\ & = & q+|Y_B|-\epsilon \\ & = & q+|Y_B|-(|Y_B|-|Y_A|) \\ & = & q+|Y_A|. \end{array}$$

En ambos casos, G contiene un conjunto de lados E' de cardinalidad $q+|Y_A|$ tal que para cualquier $rw \in E'$, con $r \in A$, $w \in B$, se cumplen que:

i) $|\{r,w\}\cap\{y,z\}|=1$,

ii) $|\{r,w\}\cap Y_A|=1$, $|\{r,w\}\cap Z_B|=1$,

iii) $d_H(r,w)\geq 3$, y

iv) $rw \notin E(H)$.

Sea $\Pi = N^*_\varphi(y^+)\cup[N_\Omega(y^+)\setminus\{y,y^{+2}\}]$. Entonces:

i) Si $\Pi \cap (N_Z^*(y))^+ \neq \emptyset$, se aplica el Lema 1.

ii) Si $\Pi \cap (N_Z^*(y))^+ = \emptyset$, existe un $u \in \Pi$, tal que para algún $v \in (N_Z^*(y))^+$ tenemos que, por hipótesis:

- Si $u^- v \in E(G) \backslash S$, se aplica el Lema 2, o
- Si $u^+ v \in E(G) \backslash S$, se aplica el Lema 3.

En consecuencia, en ambos casos, G contiene un ciclo hamiltoniano C tal que $|E(C) \cap S| = l - 1$. ■

5 Ejemplo ilustrativo del teorema principal

Sea el siguiente grafo bipartito balanceado $G = (A \cup B, E)$, con $A = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, y sea $S = \{v_1 u_2, u_2 v_5\} \subseteq E(G)$ que induce un bosque lineal, Figura 3

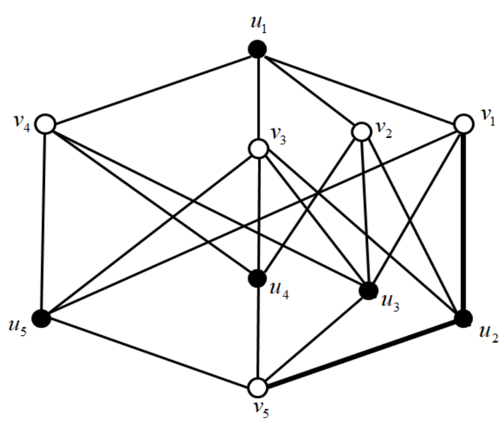

Figura 3: Representa el grafo bipartito con $n = 5$ y $m = 2$.

Observemos en la Figura 3, que G cumple con la hipótesis del Teorema Principal; por lo tanto, existen los ciclos:

$$\begin{aligned} C_2 &= u_2 v_1 u_3 v_2 u_4 v_3 u_1 v_4 u_5 v_5 u_2 \text{ tal que } |E(C_2) \cap S| = 2, \\ C_1 &= u_2 v_5 u_5 v_4 u_1 v_1 u_3 v_2 u_4 v_3 u_2 \text{ tal que } |E(C_1) \cap S| = 1, \text{ y} \\ C_0 &= u_2 v_3 u_4 v_5 u_5 v_4 u_1 v_1 u_3 v_2 u_2 \text{ tal que } |E(C_0) \cap S| = 0. \end{aligned}$$

Referencias

[1] Chen, G.; Enomoto, H.; Lou, D.; Saito, A. (2001) "Vertex-disjoint cycles containing specified edges in a bipartite graph", *Australasian Journal of Combinatorics* **23**(1): 37–48.

[2] Diestel, R. (2000) *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York.

[3] Posa, L. (1963) "On the circuits of finite graphs (russian summary)", *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Köz* **8**(1): 355–361.

[4] Sugiyama, T. (2004) "Hamiltonian cycles through a linear forest", *SUT Journal of Mathematics* **40**(2): 103–109.

[5] Wang, H. (1999) "Covering a bipartite graph with cycles passing through given edges", *Australasian Journal of Combinatorics* **19**(1): 115–121.