

BÚSQUEDA TABÚ MULTIOBJETIVO CON
ENTEROS-MIXTOS Y PUNTO DE REFERENCIA

MULTIOBJECTIVE TABU SEARCH WITH MIXED
INTEGERS AND REFERENCE POINT

RICARDO P. BEAUSOLEIL*

*Received: 10/Nov/2016; Revised: 22/Sep/2017;
Accepted: 17/Oct/2017*

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones is licensed under a Creative Commons
Reconocimiento-NoComercial-Compartirigual 4.0 International License.
Creado a partir de la obra en <http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica>



*Matemática Interdisciplinaria, ICIMAF, La Habana, Cuba. E-Mail: rbeau@icimaf.cu,
rbeau3105@gmail.com

Resumen

En este trabajo presentamos un enfoque de Búsqueda Tabú independiente del dominio para problemas con múltiples objetivos y variables mixtas (enteras y reales). En el mismo investigamos dos aspectos: la independencia del dominio y la aplicabilidad en la optimización práctica, para ello nos centramos en problemas que se encuentran frecuentemente en el mundo real, como son los problemas de redes logísticas (por ejemplo: problemas de redes de distribución con múltiples etapas, localización asignación, tablas de tiempo); también investigamos su desempeño sobre problemas clásicos como cubrimiento de conjuntos, particionamiento de conjunto, mochila multidimensional y camino más corto. Todos los problemas considerados son de la clase NP-duros, con gran número de variables, conteniendo un número de restricciones heterogéneas, presentando un reto para hallar soluciones factibles.

Palabras clave: múltiples objetivos; metaheurísticas; búsqueda tabú.

Abstract

In this work we present a domain-independent Tabu Search approach for multiobjective optimization with mixed-integer variables. In this we investigate two aspects: domain-independence and applicability in optimization practice and focus our attention in problems that appear frequently in the real world, like logistic network (for example: multi-stage distribution networks problems, location-allocation problems, time-tabling problems); however, other classical problems were investigated, like: coverage set problem, partitioning set problem, multidimensional knapsack problem and shortest path problem. All these problems belong to the NP-hard class, with a great number of decision variables, containing a great number of heterogeneous constrains, presenting a challenge to find feasible solutions.

Keywords: multiple objectives; metaheuristics; tabu search.

Mathematics Subject Classification: 90C27.

1 Introducción

En las últimas décadas muchos desarrollos de enfoques heurísticos han sido para dar solución a problemas combinatorios o con variables continuas, centrándose en aplicaciones específicas, sin embargo, pocos enfoques se han desarrollado para problemas generales de la programación en enteros-mixtos. Un gran número de problemas prácticos caen en este campo, por lo que el propósito de este trabajo es desarrollar un método de propósito general (independiente del

dominio o del contexto) para dar solución a problemas que caen en esta terminología, pero con la característica de tener múltiples objetivos. **Retos a los que nos enfrentamos al resolver estos problemas:**

- Complejidad de muchos de los problemas reales para ser resueltos por métodos convencionales.
- Muchos problemas reales pertenecen a la clase NP-duros.
- Una gran gama de estos son capturados por la programación en enteros-mixtos con restricciones heterogéneas y varias funciones objetivos lineales y/o no-lineales.
- La gran mayoría de los métodos actuales resuelven problemas con un solo objetivo.

Optimizador de dominio independiente vs dependiente del dominio. Hay dos orientaciones en la solución de problemas de optimización. Primero estas son técnicas especializadas que explotan las características del problema particular y resuelven clases de problemas donde lo más importante es hallar la calidad máxima y no el tiempo de desarrollo. Estas se denominan estrategias de dominio específico. En contraste, las heurísticas independientes del dominio (también llamadas libres de contexto) como expresa su nombre son procedimientos que no explotan las estructuras y propiedades del problema para conducir la búsqueda, estas son flexibles y trabajan desde una representación conveniente de las restricciones del problema. Una comparación entre las técnicas viene dada a continuación:

- Técnicas dependientes del dominio: Resuelven clases determinadas de problemas con gran calidad, pero costosas en tiempo para su desarrollo. Frecuentemente resuelven subproblemas del problema general. La incorporación de nuevas restricciones requieren de ajustes en el algoritmo o en la estrategia.
- Técnicas de dominio independiente: Son flexibles de aplicar a una gran variedad de problemas prácticos. Los analistas no pierden tiempo en el desarrollo de algoritmos específicos para la aplicación a problemas prácticos. Flexibles a los cambios que se producen en la fase de ajuste de la modelación. Desventaja: pueden ofertar soluciones de menor calidad y mayor tiempo de ejecución que los de dependiente del dominio .

Tales afirmaciones se basan en las publicaciones presentadas en [8], [19], [3], [13], [14] y en la experiencia como resultado de este trabajo.

2 Problema multiobjetivo en enteros mixtos con restricciones lineales

Un problema de programación en enteros-mixtos multiobjetivo con restricciones lineales consiste en un conjunto de variables enteras y reales, restricciones lineales y varias funciones objetivo lineales y/o no-lineales, que puede ser definido de la forma siguiente:

$$\min\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$$

sujeto a

$$Ax + By \leq b, U \geq x, y \geq L, x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{Z}_+^k.$$

Aquí U y L son cotas con las mismas dimensiones que las variables.

3 Fundamentos de nuestro enfoque

Una tarea de optimización multiobjetivo considera varias funciones objetivos simultáneamente. En tales casos usualmente no hay una sola solución óptima, sino un conjunto de alternativas con diferentes compromisos, llamado conjunto de soluciones óptimas Pareto, o soluciones no dominadas. En la optimización multiobjetivo hay al menos dos tareas importantes: una tarea de optimización para encontrar al conjunto de soluciones Pareto y una tarea de toma de decisiones para escoger una solución preferida. Esta última requiere de información de preferencia de un decisor (DM). Existen diferentes enfoques para abordar ambas tareas en conjunto: el enfoque apriori, donde el DM propone un punto de referencia [5], compromiso entre las funciones objetivos [9], el enfoque interactivo [2], empleados para dar solución a problemas con soluciones representadas por vectores de valores continuos o problemas combinatorios. Nuestro enfoque de solución consiste en una estrategia de punto de referencia que expresa las preferencias del decisor DM, la combinación de un conjunto de estrategias para tratar las restricciones del problema consistentes en (1) suavizar las restricciones, (2) recuperación de la factibilidad, (3) penalización, (4) y/o relajamiento. Estrategias de intensificación y diversificación de la búsqueda utilizando una estructura de memoria adaptativa, consistente en cambios secuenciales de una o un bloque de variables en concordancia con un parámetro de control adaptativo de la generación de posibles soluciones no dominadas. Utilización de un umbral de satisfacción para la creación de un conjunto de posibles soluciones no dominadas. Ninguna restricción es impuesta sobre los coeficientes del problema (tales como no-negatividad) o sobre las soluciones de inicio o reinicio (tales

como factibilidad). Los problemas mono-objetivo son tratados como bi-objetivo repitiendo el objetivo.

Los objetivos del enfoque han sido: (1) desarrollar un optimizador para problemas con múltiples criterios que ayude al DM a encontrar soluciones que mejor se aproximen a sus preferencias, (2) brindar información de puntos interesantes vecinos alrededor de la solución preferente.

Estrategia de punto de referencia: La optimización heurística multiobjetivo tiene como objetivo hallar la mejor solución de compromiso o una buena aproximación a este, estos métodos requieren de la información de preferencias para estrechar la búsqueda en regiones de interés del decisor. Nuestro enfoque se basa en (1) punto de referencia el cual puede ser alcanzable o no alcanzable y (2) una medida de calidad que identifique la dirección de búsqueda más prometedora, para ello hacemos uso de la siguiente función de agregación sugerida en [20].

Función de calidad:

$$s(f, \tilde{f}, \beta, \rho) = \min\{\max\{\beta_j | f_j(x) - \tilde{f}_j|\}\} + \rho \sum_j |(f_j(x) - \tilde{f}_j)|\}$$

donde \tilde{f} es el punto de referencia y β y ρ son parámetros de control determinístico, sobre f no se exige nada.

Tratamiento de las restricciones:

- Suavización de las restricciones. Proceso que modifica los coeficientes de la parte derecha de las restricciones. Aquí el proceso es aplicado a un par de umbrales. Inicialmente ambos umbrales toman el valor medio de los coeficientes de la parte derecha de las restricciones distanciándolos gradualmente. Los coeficientes con valores por encima del umbral superior son tratados iguales a este umbral y aquellos que se encuentran por debajo del umbral inferior iguales a él, los restantes coeficientes permanecen con su valor. Este proceso implica la solución de una secuencia de subproblemas, donde los resultados de un subproblema son utilizados como soluciones de inicio del siguiente subproblema.
- Proyección al espacio factible.
 1. Probar la posibilidad de factibilidad e identificar las restricciones no factibles.
 2. Restablecer la factibilidad en el caso de que sea posible.
 - 2.1 Inicialmente todas las variables son elegibles para cambiar su valor.

2.2 Calcular el valor máximo que pueden tomar las variables elegibles.

2.3 Para cada variable elegible y cada restricción no factible calcular su contribución. Alinear las variables conforme a la suma de sus coeficientes correspondientes a las restricciones no factibles.

2.4 Seleccionar la restricción con menor valor de capacidad disponible b .

2.5 Seleccionar la variable elegible con la menor contribución.

2.6 Para la variable con menor contribución: si es una variable binaria entonces, negar su valor, en caso contrario, calcular el nuevo rango de valores donde tomara valor la variable seleccionada sin violar la restricción.

2.7 Colocar a la variable como no elegible.

2.8 Comprobar la factibilidad, continuar hasta que tengamos factibilidad o no existan variables elegibles.

- Penalización: La función de penalización contiene al objetivo original del problema de optimización, más un término adicional para cada restricción el cual es positivo cuando el punto actual x viola la restricción y cero en caso contrario. Una de las más simples funciones de penalización es la penalización cuadrática, en la cual los términos adicionales son cuadrados de las restricciones violadas [15]. Como función de penalidad proponemos la siguiente función cuadrática adaptativa

$$penalty = \sum_{i=1}^m \omega(\min(0, RHS_i - LHS_i))^2,$$

donde $\omega = \xi - \exp(-\max_{\rho} \frac{0, \rho - it}{\rho})$, ξ y ρ son parámetros de control determinísticos, ω e it , son parámetros de control adaptativos, donde it representa al número de iteraciones de la búsqueda tabú y RHS_i , LHS_i representan respectivamente las partes derecha e izquierda de las restricciones, los valores para ξ y ρ fueron 1.2 y 60 respectivamente. La evaluación de la función objetivo es modificada añadiendo el valor de la función de penalidad.

- Relajamiento: En el enfoque presente es opcional relajar el conjunto de restricciones que consideramos más difíciles de satisfacer por la heurística, por ejemplo restricciones de igualdad. Esta estrategia en el procedimiento

de recuperación de factibilidad no toma en consideración las restricciones relajadas y orienta la búsqueda por penalización de la infactibilidad.

Perturbación de la solución

- **Movimiento unitario:** Denotamos por x' a la solución actual y a x'_j la variable con índice j de x' . Una variación de x'_j se expresa mediante la expresión siguiente $\nu_j = L_j + itabu/\rho(U_j - L_j)$ donde L_j es el límite inferior de la variable x'_j y U_j es su límite superior. El parámetro de control $itabu$ controla al número de soluciones generadas en la búsqueda de soluciones candidatas a no dominadas y el parámetro ρ denota al número de soluciones candidatas que serán generadas. Entonces si x'_j es una variable entera no binaria $\nu'_j = round(\nu_j)$ donde $round$ es una función de redondeo, en caso contrario si es real no hay redondeo y si es binaria entonces $\nu'_j = 1 - x'_j$. La solución candidata denotada por x'' se obtiene sustituyendo el valor de la posición j de la forma siguiente $x'' = x'_1, x'_2, \dots, \nu'_j, \dots, x'_n$.
- **Movimiento en bloque:** Este movimiento se basa en cambiar todas las variables que han variado su valor durante la búsqueda de nuevos candidatos de soluciones no dominadas. Denotamos por y la solución inicial de la búsqueda de soluciones candidatas, I conjunto de índices de las variables que aumentaron su valor durante el proceso de búsqueda hasta la solución actual, D conjunto de índices que disminuyeron su valor durante este proceso de búsqueda. Inicialmente $I = D = \emptyset$, entonces si $y_j < x'_j$ hacemos a $I = I + \{j\}$ y si $y_k > x'_k$ entonces $D = D + \{k\}$. Las variaciones se expresan de la forma siguiente:

$$\nu_j = \emptyset(y_j - L_j), \forall j \in I, \nu_k = \theta(U_k - y_k), \forall k \in D,$$

donde el parámetro θ se mueve secuencialmente en el conjunto $\{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1\}$, x'' se obtiene por sustitución como en el caso anterior. Con este movimiento deseamos buscar en una región poca o no visitada moviéndonos en dirección opuesta a la dirección que llevaba la búsqueda hasta la solución actual.

Selección de la variable x'_j :

La selección de la variable se realiza utilizando una estructura de memoria basada en frecuencia, que contiene al número de veces que la variable ha sido seleccionada para cambiar su valor. La variable se escogerá con el menor valor de frecuencia.

Umbral de satisfacción:

Un umbral de satisfacción es utilizado para obtener un conjunto de soluciones posiblemente no dominadas. Denotamos como S al conjunto de posibles soluciones no dominadas entonces, una solución candidata es incorporada a S si cumple el umbral de satisfacción. Decimos que una solución candidata cumple con el umbral si la siguiente expresión lógica $(s' < z_1^*) \wedge (\text{penalty}(x'') \leq \min\{z_2^*, \sigma\})$ se hace verdadera, donde $s' = (f', \bar{f}, \beta, \rho)$ y $f' = f(x'') + \text{penalty}(x'')$, $z^* = (z_1^*, z_2^*)$ es un punto de referencia dinámico (umbral de satisfacción) y σ es un parámetro de control que regula la profundidad que pueden alcanzar las soluciones candidatas en la región no factible que se admiten en S , σ se fija igual a el valor 50.

El punto z^* es actualizado de la manera siguiente:

$$z_1^* = \min\{f'(x'') : x'' \in S\} \text{ y } z_2^* = \min\{\text{penalty}(x'') : x'' \in S\}.$$

Tránsito a una nueva solución:

Para realizar el tránsito a una nueva solución utilizamos una estructura de lista de candidatos basada en memorizar los movimientos más recientes y el valor de s' . Se crea una lista de 5 candidatos y se selecciona el de mejor calidad, es decir el que tiene menor valor de s' , en el caso en que el mejor de los candidatos está prohibido como movimiento más reciente entonces probamos si se satisface el criterio siguiente $s' > \text{optimo}$ donde optimo es el mejor valor obtenido durante el proceso de búsqueda hasta la actualidad, en el caso en que no se cumpla el criterio anterior entonces, para todas las soluciones prohibidas en la lista se escoge la que más tiempo de prohibición tenga.

Solución inicial:

La solución inicial se genera de forma siguiente: $x_j = L_j + we_j(U_j - L_j)$ $j = 1, 2, \dots, n$ donde L y U son las cotas inferiores y superiores respectivamente de las variables de decisión del problema de optimización dado, donde $we_j \in A$ es un parámetro determinístico cuyo valor es tomado progresivamente de forma circular del conjunto ordenado $A = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$. Los valores para las variables enteras son redondeados al valor entero más cercano.

Criterio de parada:

El algoritmo para si durante un cierto número de iteraciones no cambia el mejor valor encontrado durante la búsqueda.

Método de búsqueda tabú multiinicios multiobjetivo:

Notación: H : memoria de frecuencia, T : lista tabú, R : conjunto de soluciones no dominadas, CV : conjunto de soluciones candidatas.

Método de búsqueda

1. Inicialización.
2. Ejecutar método de suavización de restricciones.
3. Generar solución inicial x' factible o no.
4. Seleccionar $x'' \in CV(H, x')$.
5. Proyectar al espacio factible o penalizar.
6. Comprobar umbral de satisfacción, si se cumple $x'' \rightarrow S$.
7. Actualizar umbral de satisfacción z^* .
8. Escoger $R \subseteq S$.
9. Si terminaron los subproblemas suavizados entonces ir al paso 10, en caso contrario retornar al paso 2.
10. Si no se cumple el criterio de parada entonces retornar al paso 3, en caso contrario parar.

4 Experimentos computacionales

4.1 Problemas clásicos

Problema de mochila multidimensional multiobjetivo

El problema de mochila (o carga) es un problema del tipo NP-Duro, en este experimento usamos un problema con variables 0,1 propuesto por Zitzler y Thiele [22].

En la Figura 1 mostramos los resultados obtenidos de las corridas para estos dos problemas. El gráfico muestra soluciones óptimas tomadas como puntos de referencias Pareto dados en diferentes direcciones reflejando diferentes preferencias y las aproximaciones halladas. Se puede observar que el algoritmo responde adecuadamente a las orientaciones dadas por los puntos de referencias y la cercanía de las aproximaciones a dichos puntos.

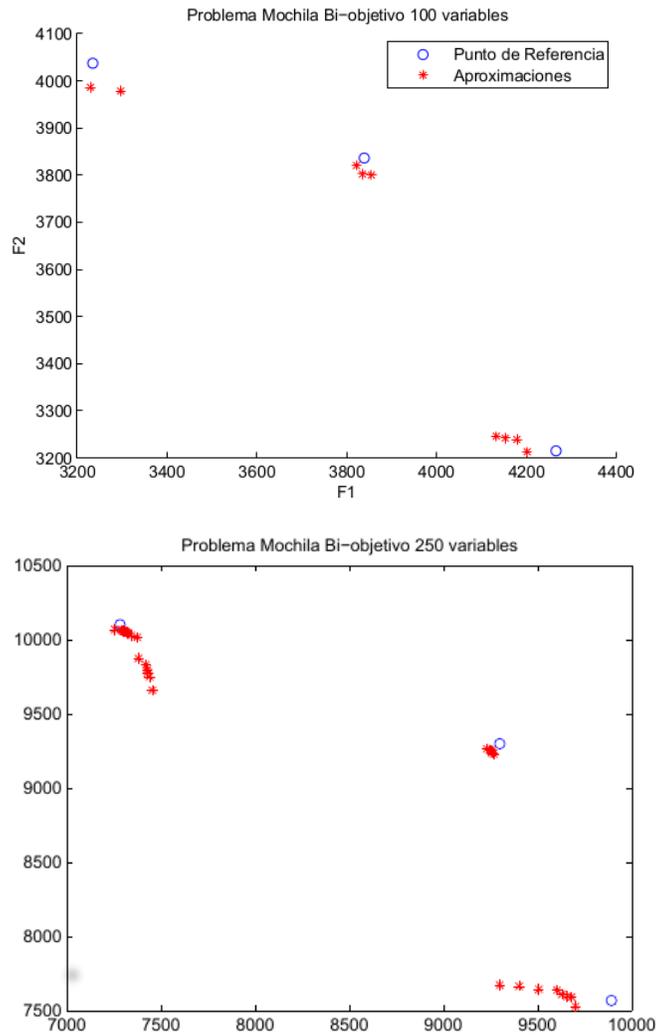


Figura 1: Mochila multidimensional multiobjetivo con 100 y 200 variables cero-uno.

Problema de cubrimiento de conjunto

Este problema es de la clase NP-Duro y se encuentra estrechamente relacionado con el problema de *mínima cardinalidad de cubrimiento* de la teoría combinatoria de grafos, donde un cubrimiento es un conjunto de arcos cuyos puntos finales incluyen a todos los nodos del grafo. En este trabajo analizamos los problemas 2scp11A, 2scp41A, con 100 y 250 variables y respectivamente con 10 y 41 restricciones propuesto en [11] por Jaskiewicz A. Los puntos de referencias fueron seleccionados de los resultados publicados en [11]. La Figura 2 muestra que los puntos hallados se aproximan a los puntos dados, destacándose que la dirección a las preferencias dadas mediante los puntos se mantiene.

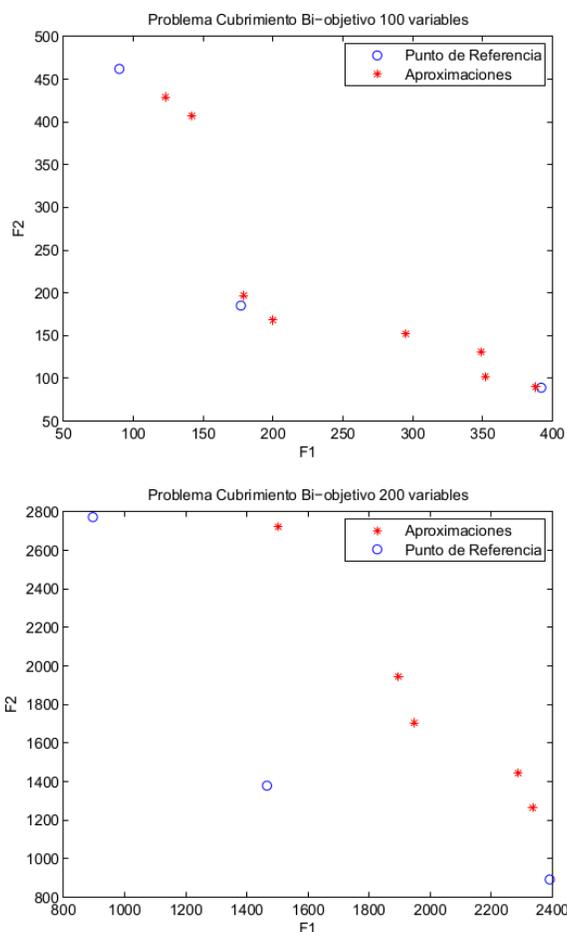


Figura 2: Cubrimiento de conjunto con 100 y 250 variables cero-uno.

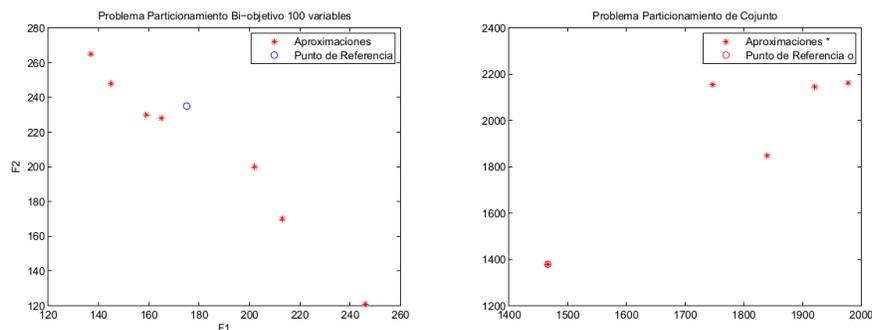


Figura 3: Problema particionamiento 100 y 250 variables cero-uno.

Problema de particionamiento de conjunto

Muchos de los problemas de la vida real pueden ser modelados como un problema de particionamiento de conjunto (SSP de sus siglas en Inglés), problemas como la Programación de la Tripulación de Aerolínea [13], problemas de Enrutamiento de Vehículos (VRP de sus siglas en Inglés) [12]. Uno de los principales retos de los modelos basados en SSP es la gran cantidad de posibilidades que se requiere generar para hallar buenas soluciones, otro es el tiempo prohibitivo que se necesita para la obtención de una solución óptima. Todo esto referido a mono-objetivo, en el caso multiobjetivo estas dificultades se incrementan.

La Figura 3 corresponde al resultado correspondiente al problema de particionamiento de conjunto para los datos utilizados en los problemas de cubrimiento 2scp11A y 2scp41A con 100 y 250 variables, 10 y 41 restricciones adaptado para SPP y puntos de referencias (175,235) y (1466,1379) respectivamente; el tiempo de ejecución fue de 3 min. y 30 seg. para el problema 2scp11A y 38 min. y 11 seg. para el 2scp41A.

En los anteriores experimentos se aprecia que el algoritmo responde bien a las preferencias dadas mediante los puntos de referencias y con buenas aproximaciones a dichos puntos.

Los experimentos con modelos logísticos fueron tomados del libro *Network Models and Optimization, Multiobjective Genetic Algorithms Approach* [16].

Problema camino más corto biobjetivo

El problema Camino más Corto multiobjetivo (mPCC) es el corazón de los problemas de optimización de redes. Siendo el problema de redes más simple puede capturar muchos ingredientes significativos. Aunque es un problema

relativamente simple, desde el punto de vista de un algoritmo independiente del dominio, presenta grandes dificultades motivado por las restricciones de igualdad, que constituyen el núcleo de su modelación matemática. Este problema tiene como objetivo por lo general minimizar el tiempo de recorrido. No obstante, en muchas aplicaciones la complejidad de la vida real sugiere el uso de otras funciones objetivos. Funciones tales como costos, impacto ambiental, riesgo, son también objetivos importantes para seleccionar la ruta óptima. El problema de Camino más Corto biobjetivo (bPCC) es formulado en el cual los objetivos son minimizar la función de costo z_1 y minimizar la función de demora z_2 desde la fuente 1 hasta el destino n .

Dado el punto de referencia (100,50) se obtienen las soluciones factibles siguientes: Para los caminos siguientes: (1) 1, 3, 7, 10, 11; (2) 1, 4, 7, 10, 11. Con valores funciones objetivo $f_1 = 66$, $f_2 = 23$ para ambas soluciones, en un tiempo de 55 seg.

Los datos para este problema se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Datos para el problema camino más corto.

nodos (i, j)	c_{ij}	d_{ij}	nodos(i,j)	c_{ij}	d_{ij}
(1,2)	18	3	(5,8)	19	9
(1,3)	19	5	(6,5)	15	3
(1,4)	17	2	(6,8)	16	5
(2,3)	13	2	(6,9)	18	7
(2,5)	16	7	(6,10)	15	10
(2,6)	14	8	(7,6)	13	8
(3,4)	15	4	(7,10)	17	1
(3,6)	16	6	(8,9)	18	3
(3,7)	17	7	(8,11)	17	4
(4,7)	19	10	(9,10)	14	5
(9,11)	19	6	(10,11)	17	10

4.2 Modelos logísticos

Los diseños de redes logísticas se caracterizan por optimizar el número, localización, capacidad y tipo de plantas, almacenes y centros de distribución a ser usados.

También establecer los canales de distribución, cantidad de materiales y productos a consumir, producir y embarcar desde los suministradores hacia los consumidores. Estos cubren una gran gama de formulaciones, desde modelos

lineales hasta modelos no lineales con uno o varios objetivos, determinísticos o estocásticos. Nosotros nos ocupamos de formulaciones con uno o varios objetivos lineales y no lineales, con restricciones lineales.

4.2.1 Problema de transportación biobjetivo con costo de carga y flujo acotado

El modelo con costo de carga es una extensión del modelo de transportación. En este tipo de problema son considerados dos tipos de costos: (1) costos variables proporcionales al nivel de actividad, y (2) los costos de carga. El problema de transportación biobjetivo con costo de carga fijo (bfTP de sus siglas en inglés) busca minimizar los costos de transportación de artículos homogéneos desde un número de suministradores hacia un número de clientes. Se requiere el nivel de suministro y la cantidad demandada por los clientes. El objetivo es situar el suministro disponible de cada suministrador de manera que el objetivo se optimice satisfaciendo la demanda de los clientes. Este modelo con $S = \{1, 2, \dots, I\}$ suministradores y $C = \{1, 2, \dots, J\}$ clientes, $c_{i,j}$ costos de transportación desde i hacia j , t_{ij} tiempo de entrega por unidad de producto desde i hasta j , f_{ij} costos de transportación total por unidad de mercancía transportada desde i hacia j , a_i capacidad de la fuente i , b_j demanda del artículo j , $x_{ij} \in \mathbb{Z}_+^n$ el problema puede ser formulado de la forma siguiente:

$$\min z_1 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (c_{ij}x_{ij} + f_{ij}\delta(x_{ij}))$$

$$\min z_2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij}x_{ij})$$

s.a

$$\sum_{j=1}^J x_{ij} \leq a_i, \forall i = 1..I \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ij} \geq b_j, \forall j = 1..J \quad (2)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Las Tablas 2, 3 y 4 muestran los datos utilizados en el ejemplo de prueba.

Tabla 2: Datos para el problema transportación biobjetivo con costo de carga y flujo acotado. Costos $c_{i,j}$ de la función objetivo z_1 .

S/D	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	7	7	8	10	9	2
2	1	9	3	4	3	5	7	1
3	8	9	4	6	4	1	6	9
4	2	4	5	5	3	2	3	2
5	5	4	5	1	9	9	1	9
6	8	3	3	2	2	3	6	7
7	1	2	6	4	5	9	3	5

Tabla 3: Datos para el problema transportación biobjetivo con costo de carga y flujo acotado. Costos $t_{i,j}$ de la función objetivo z_2 .

S/D	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4	4	3	4	5	8	9	10
2	6	2	5	1	7	4	12	14
3	2	9	1	8	9	1	4	0
4	3	5	5	3	2	8	3	3
5	1	4	12	2	1	5	4	9
6	2	23	4	4	6	2	4	6
7	1	2	1	9	0	13	2	3

Tabla 4: Datos para el problema transportación biobjetivo con costo de carga y flujo acotado. Demandas de los clientes.

S/D	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	4	3	4	7	3	5
2	1	7	2	3	2	1	5	1
3	6	6	1	4	3	1	4	4
4	2	3	2	3	2	1	2	1
5	4	2	3	1	6	6	1	5
6	7	1	2	1	1	2	3	4
7	1	2	4	3	4	7	3	5

Análisis de uno de los resultados obtenido. En el siguiente experimento situamos el punto de referencia en (300, 300) lo que indica igualdad de preferencia de los objetivos. Obteniéndose los siguientes puntos no dominados ($f_1 = 329, f_2 = 301$), ($f_1 = 350, f_2 = 260$), ($f_1 = 341, f_2 = 277$). Para el primer punto la solución es la siguiente:

1. el destino 1 se cubre de con: 6 unidades de la fuente 3, 1 unidad de la 6 y 2 unidades de la 7, en total 9 unidades;
2. el destino 2 se cubre de con: 2 unidades de la fuente 3, 3 unidades de la 5 y 2 unidades de la 7, en total 7 unidades;
3. el destino 3 se cubre de con: 6 unidades de la fuente 1, 9 unidades de la 3, en total 15 unidades;
4. el destino 4 se cubre de con: 2 unidades de la fuente 1, 7 unidades de la 5 y 1 unidad de la 7, en total 10 unidades;
5. el destino 5 se cubre de con: 9 unidades de la fuente 2, 4 unidades de la 5, en total 13 unidades;
6. el destino 6 se cubre de con: 1 unidad de la fuente 1, 1 unidad de la 3, 1 unidad de la 5, 13 unidades de la 6, en total 16 unidades;
7. el destino 7 se cubre de con: 1 unidad de la fuente 4, 4 unidades de la 5, 1 unidad de la 6 y 1 unidad de la 7, en total 7 unidades;
8. el destino 8 se cubre de con: 1 unidad de la fuente 1, 9 unidades de la 4, 2 unidades de la 5, en total 12 unidades.

Observe que los destinos se cubrieron totalmente sin exceder la demanda y sin utilizar todas las capacidades.

4.2.2 Problema de localización-asignación con capacidad limitada

Los problemas de localización y asignación envuelven determinar qué cantidad deberá recibir cada consumidor o cliente así como la localización donde deberá ser ubicado el centro de distribución (CD) con sus capacidades correspondientes dadas y las demandas de los consumidores.

Formulación matemática del problema de localización asignación.

La versión más general de este tipo de modelo es el problema de localización asignación con capacidades dadas es la siguiente: estamos interesados en encontrar m localizaciones en un espacio continuo donde situar los centros de distribución para servir a n consumidores situados en puntos dados de este espacio, así como las cantidades que deberá servir cada centro de distribución de modo tal que se minimice la distancia total entre los consumidores y los centros.

Requerimientos: (1) Los CD tienen capacidades limitadas, (2) cada cliente es satisfecho por un CD. Este problema será modelado como un problema en enteros mixtos de la forma siguiente:

*Notación**Índices*

$i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$, centros de distribución;

$j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, consumidores.

Parámetros

m , total de centros de distribución,

n , total del número de consumidores,

$C_j = (u_j, v_j)$, $j \in J$, localización del consumidor j ,

a_i , $i \in I$, capacidad del centro i ,

b_j , $j \in J$, demanda del consumidor j ,

$t(F_i, C_j)$, distancia Euclidiana de la localización del centro i , (x_i, y_i) a la localización del consumidor j , (u_j, v_j) .

Variables de decisión

$z_{ij} \in \{0, 1\}$, variable de asignación,

$z_{ij} = 1$, representa al consumidor i servido por el centro j ,

$F_i = (x_i, y_i)$, localización desconocida del centro i .

$$\min f(F, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t(F_i, C_j) \cdot z_{ij}$$

sujeto a

$$g_i = \sum_{j=1}^n b_j z_{i,j} \leq a_i, \forall i \in I \quad (3)$$

$$g_{m+j}(Z) = \sum_{i=1}^m z_{ij} = 1, \forall j \in J \quad (4)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in I, j \in J$$

$$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2.$$

Este es un problema de optimización combinatoria bien conocido con aplicaciones en sistemas de producción distribución. El mismo es más complejo porque el sub problema de asignación es un problema de asignación generalizada conocido como un problema combinatorio NP-duro, que además tiene una función objetivo no lineal.

En el experimento se utilizó la variante con 3 centros de distribución y 16 consumidores. Los parámetros del espacio para las localizaciones fueron $[0, 12000] \times [0, 10000]$, utilizados por los autores del ejemplo, el punto de referencia fue (40000, 40000), el tiempo de ejecución fue de 21 ss. La respuesta obtenida fue la siguiente: $f = 44398.71$ para solo un 11% peor que la solución obtenida por el algoritmo genético utilizado por los autores del libro [16], solución no mala tomando en consideración que el algoritmo es general y puede ejecutar con múltiples objetivos. Los consumidores fueron agrupados de la misma forma por ambos algoritmos, solo difieren en la ubicación de los CD.

Los datos del problema se encuentran en las Tablas 5, 6 y 7.

Tabla 5: Resultados del problema de localización-asignación.

a_i	Localización	Asignación	Distancia
800	1866.68,2000.00	4,6,8,9	44398.71
8600	3600.00,8444.44	1,2,3,5,7,10	-
600	10666.66,7333.33	11,12,13,14,15,16	-

4.2.3 Problema de distribución con múltiples etapas

El problema de transportación es un problema básico de redes bien conocido propuesto originalmente por Hitchcock [10]. El objetivo es hallar la forma de

Tabla 6: Datos para el problema de localización-asignación. Localización de los clientes.

j	(u_j, v_j)	b_j	j	(u_j, v_j)	b_j
1	(0, 0)	100	9	(4000, 10000)	100
2	(0, 500)	100	10	(5000, 1000)	100
3	(1000, 4000)	100	11	(7000, 6000)	100
4	(1000, 9000)	100	12	(8000, 1000)	100
5	(2000, 2000)	100	13	(8000, 10000)	100
6	(2000, 6000)	100	14	(10000, 7000)	100
7	(4000, 4000)	100	15	(11000, 2000)	100
8	(4000, 8000)	100	16	(12000, 10000)	100

Tabla 7: Datos para el problema de localización-asignación. Capacidades de los suministradores.

i	a_1	a_2	a_3
1	800	600	600

transportar productos homogéneos desde varias fuentes hacia diferentes destinos de modo tal que se optimice cierta función objetivo, por lo general costos. Para algunos problemas reales el mismo es extendido para satisfacer algunas restricciones adicionales o ejecutadas en diferentes etapas. La eficiencia del sistema logístico está influenciada por diversos factores: uno de ellos es decidir el número de centros de distribución CD, y determinar un buen lugar para su apertura en tal forma que se satisfaga la demanda de los clientes con un mínimo de costos de los CD abiertos y costo mínimo de la transportación.

Los problemas logísticos de múltiples etapas y sus variaciones son conocidos, Geoffrion y Graves [7] fueron los primeros investigadores en estudiar los modelos con dos etapas.

En este trabajo consideramos el siguiente problema de transportación de dos etapas: determinar la red de distribución que satisfaga las demandas de los clientes a un costo de transportación-operación y tiempo de entrega mínimos sujeto a las capacidades de las plantas, capacidades de los centros (CD) y demanda de los clientes. Con los siguientes requerimientos: (1) cumplir con las capacidades de las plantas, (2) cumplir con las capacidades de los CD, (3) satisfacer demandas de los clientes, (4) cumplir con un número máximo de CD operando, (5) garantizar que los CD operando reciban suministro, (6) la canti-

dad total de suministro entregado por los CD debe ser compensada con la entrega de las plantas.

4.2.4 Modelo de transportación con dos etapas (2eTP)

En este modelo se asume lo siguiente:

1. Las localizaciones de los clientes y sus demandas son conocidas.
2. Las localizaciones potenciales de los CD así como sus capacidades máximas son conocidas.
3. Las facilidades tienen capacidades limitadas y existe un límite de centros a ser abiertos.
4. Los centros de distribución abiertos están restringidos.
5. Los centros abiertos reciben suministro.
6. Las cantidades distribuidas son compensadas con suministros.

Este tipo de problema incluye un problema de transportación y localización de facilidades y es visto como el problema de localización de facilidades p-media con capacidades limitadas y el mismo es un problema NP-duro. En este trabajo la función objetivo es biobjetivo. La primera representa los costos de transportación y costos fijos de apertura de los centros, la segunda representa el tiempo total de de transportación más la descarga de la mercancía (entrega).

Notación

Indices

$i \in I = \{1, 2, \dots, p\}$, plantas,
 $j \in I = \{1, 2, \dots, m\}$, centros de distribución,
 $k \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, consumidores.

Parámetros

p , total del número de plantas,
 m , total de número centros de distribución,
 n , total del número de consumidores,
 $a_i : i \in I$, capacidad de la planta i ,

$b_j : j \in J$, capacidad del centro j ,
 $d_k : k \in K$, demanda del consumidor k ,
 c_{ij}^1 , unidad de costo de transportación desde la planta i hasta el centro de distribución j ,
 c_{ij}^2 , unidad de costo de transportación desde el centro j hasta el cliente k ,
 t_{ij}^1 , tiempo de entrega desde la planta i hacia el centro j ,
 t_{ij}^2 , tiempo de entrega desde el centro j hacia el cliente k ,
 g_j , costo fijo para la operación del centro j ,
 W , limite superior de centros que pueden ser abiertos.

Variables de decisión

x_{ij} , cantidad de transportación desde la planta i hasta el centro de distribución j ,
 y_{jk} , cantidad de transportación desde el centro j hasta el cliente k ,
 $z_j \in \{0, 1\}$, variable de asignación que toma valor 1 si el centro j es abierto.

$$\min z_1 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m c_{ij}^1 x_{ij} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n c_{ij}^2 y_{jk} + \sum_{j=1}^m g_j z_j$$

$$\min z_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m t_{ij}^1 x_{ij} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n t_{ij}^2 y_{jk}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i, \quad \forall i \in I \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^n y_{jk} \leq b_j z_j, \quad \forall j \in J \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^m y_{jk} \geq d_k, \quad \forall k \in K \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^m z_j \leq W \tag{8}$$

$$U x_{ij} \geq y_j \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n y_{jk} \tag{10}$$

$$L \leq x_{ij}y_{jk} \leq U, \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K$$

$$z_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J.$$

Ejemplo numérico

El siguiente ejemplo supone que se tienen 3 plantas, 4 centros de distribución y 8 clientes, para un total de 48 variables enteras y 34 restricciones. Los datos de costos, capacidades de las facilidades y cantidad de centros que operan vienen dados en las Tablas 8, 9, 10 y 11. Los costos de apertura del centro j son los siguientes: $g_1 = 10, g_2 = 5, g_3 = 4, g_4 = 9$, el límite de centros abiertos $W = 3$. Se obtuvieron 4 soluciones no dominadas factibles para el punto de referencia (164, 164), las soluciones son: (210, 156), (221, 149), (229, 146), (245, 144). El tiempo de computación fue de 1 mn 32 ss.

Tabla 8: Datos del problema transporte dos etapas. Capacidades de las plantas, centros de distribución y demandas.

	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	10	15	20					
b_j	10	9	12	16				
d_k	5	3	4	5	2	3	6	3

Tabla 9: Datos del problema transporte dos etapas. Costos de transportación de las plantas i hacia el centro de distribución j y hacia el cliente k .

c_{ij}	1	2	3	4	c_{jk}	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	7	7	1	3	5	7	1	8	6	4	6
2	8	10	9	2	2	4	1	6	9	2	4	5	5
3	1	9	3	4	3	3	2	3	2	5	4	5	1
					4	9	9	1	6	8	3	3	2

Tabla 10: Datos del problema transporte dos etapas. Tabla de tiempo desde la planta i hacia el centro j .

i	j			
1	5	2	1	5
2	6	8	2	1
3	1	7	2	3

4.2.5 Modelo flexible con dos etapas

El siguiente experimento consiste en una extensión del modelo anterior, en el mismo se permite que las plantas envíen directamente a los clientes. También, se incorpora una nueva complicación introduciendo un costo de operación variable que depende de la cantidad de producto recibido en el centro de distribución, denominada *costo de renta*.

Formulación matemática del nuevo modelo: Hipótesis asumidas:

1. Consideramos el caso de un solo producto.
2. Periodo de tiempo simple.
3. Máximo de dos escalones o etapas (plantas, centros de distribución, clientes).

Tabla 11: Datos del problema transporte dos etapas. Tabla de tiempo desde el centro j hacia el cliente k .

t_{jk}^2	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	5	1	6	6	1	4
2	3	1	4	4	2	3	2	3
3	2	1	2	1	4	2	3	1
4	6	6	1	5	7	1	2	1

4. Dos modos de entregas (entrega directa: plantas-clientes, indirecta: planta-centros, centros-plantas).
5. Las demandas de los clientes son conocidas.

El modelo de transportación con múltiples etapas que envuelve operaciones de apertura/cierre es NP-duro. La existencia de nuevos modos de entrega introducen una mayor complicación al problema aumentando el espacio de búsqueda. Los métodos tradicionales son incapaces de dar respuesta en un tiempo computacional adecuado.

Notación

Índices

$i \in I = \{1, 2, \dots, p\}$, plantas,

$j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ centros de distribución,

$k \in K = \{1, 2, \dots, n\}$ consumidores.

Parámetros

p , total del número de plantas,

m , total de número centros de distribución,

n , total del número de consumidores,

$a_i : i \in I$, capacidad de la planta i ,

$b_j : j \in J$, capacidad del centro j ,

$d_k : k \in K$, demanda del consumidor k ,

c_{ij}^1 , unidad de costo de transportación desde la planta i hasta el CD j ,

c_{ij}^2 , unidad de costo de transportación desde el centro j hasta el cliente k ,

c_{ij}^3 , unidad de costo de transportación desde la planta i hasta el cliente k ,

g_j , costo fijo para la operación del centro j ,

c_j , costo de renta para la operación del centro j ,

W , limite superior de centros que pueden ser abiertos.

Variables de decisión

x_{ij}^1 , cantidad de transportación desde la planta i hasta el centro de distribución j ,
 x_{jk}^2 , cantidad de transportación desde el centro j hasta el cliente k ,
 x_{ik}^3 , cantidad de transportación desde la planta i hasta el cliente k ,
 $z_j \in \{0, 1\}$, variable de asignación que toma valor 1 si el centro j es abierto.

$$\min f_1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}^1 x_{ij}^1 + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{jk}^2 x_{jk}^2 + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} c_{ik}^3 x_{ik}^3$$

$$\min f_2 = \sum_{j \in J} (g_j + c_j \sum_{i \in I} x_{ij}^1) z_j$$

sujeto a

$$\sum_{j \in J} x_{ij}^1 + \sum_{k \in K} x_{ik}^3 \leq a_i, \quad \forall i \in I \tag{11}$$

$$\sum_{k \in K} x_{jk}^2 \leq b_j z_j, \quad \forall j \in J \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^m x_{jk}^2 + x_{ik}^3 \geq d_k, \quad \forall k \in K \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^m z_j \leq W \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m x_{ij}^1 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n x_{jk}^2 \tag{15}$$

$$L \leq x_{ij} y_{jk} \leq U, \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K$$

$$z_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J$$

Para el experimento en el modelo flexible con dos etapas las Tablas 12 y 13 se agregan a las tablas correspondientes al experimento con dos etapas no flexible.

Tabla 12: Datos del problema transporte flexible dos etapas. Costo de renta del centro j .

j	1	2	3	4
c_j	2	3	5	4

Tabla 13: Datos del problema transporte flexible dos etapas. Costo de transporte de la planta i hacia el cliente j .

c_{ij}^3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	8	10	3	6	3	5	4
2	3	3	5	7	4	6	8	5
3	10	7	3	4	5	2	3	4

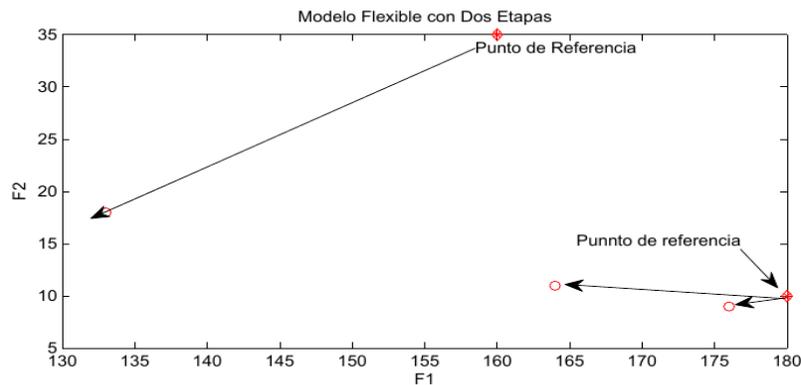


Figura 4: Modelo flexible dos etapas.

Se obtuvieron 3 soluciones no dominadas factibles siguientes: (133,18), (164,11), (176,9). Los puntos de referencia (PR) dados fueron: (160,35) y (180,10).

Observemos la gráfica de las soluciones en el espacio de los objetivos: En la Figura 4 se muestran los puntos de referencias dados y los resultados obtenidos, en el mismo se aprecia que las soluciones se orientan hacia el punto de referencia, observe que las soluciones en su mayoría dominan a los puntos de referencia, lo que demuestra la habilidad de nuestro algoritmo de hallar soluciones no dominadas en la orientación del PR. El tiempo computacional fue 67 ss.

4.3 Problema de tabla de tiempo

El problema de estudio es el denominado *the progressive party problem* presentado en [18]. El escenario del problema se desarrolla en una actividad festiva de navegación de recreo en la tarde. Se seleccionan ciertos barcos como organizadores (receptores) y los restantes como huéspedes (visitantes). Las tripula-

ciones de los barcos huéspedes visitan una vez cada periodo de media hora a los barcos organizadores. Cada organizador admitirá un limitado número de visitantes. La cantidad de invitados y el tamaño de las tripulaciones son diferentes.

Modelación del problema *the progressive party*.

Notación

Índices

$i, k \in I = \{1, 2, \dots, m\}$, barcos,
 $t \in T = \{1, 2, \dots, n\}$, periodos de tiempo.

Parámetros

$K_i - c_i : i \in I$, capacidad del espacio,
 $c_i : i \in I$, tamaño de la tripulación.

Variables

$\delta_i : i \in I$, $\delta_i = 1$ si el bote i es un organizador, 0 en caso contrario,
 $\lambda_{ikt} : i, k \in I; t \in T$, $\lambda_{ikt} = 1$ si el bote k visita al bote i en el tiempo t .

$$\min \sum_i \delta_i$$

sujeto a

$$\lambda_{ikt} - \delta_i \leq 0, \forall i, k \in I, t \in T; i \neq k \tag{16}$$

$$\sum_{k, k \neq i} c_k \lambda_{ikt} \leq K_i - c_i, \forall i \in I, t \in T \tag{17}$$

$$\sum_t \lambda_{ikt} \leq 1, \forall i, k \in I, i \neq k \tag{18}$$

$$\delta_k - \sum_{i, i \neq k} \lambda_{ikt} = 1, \forall k \in I, t \in T. \tag{19}$$

Requerimientos: (1) Un bote puede ser visitado si él es un receptor, (2) la capacidad del receptor no puede ser excedida, (3) un bote huésped no puede visitar a un receptor más de una vez, (4) cada bote debe tener un visitante o ser receptor.

Experimento numérico. Analicemos el siguiente escenario: Se tienen 6 botes y se requiere seleccionar un subconjunto de botes visitantes para 3 periodos de tiempo. Esta instancia genera un conjunto de 114 variables binarias y 174 restricciones tomando en consideración que las igualdades son descompuestas en dos restricciones de desigualdades. Los datos vienen dados en la Tabla 14.

Tabla 14: Datos para el problema de tabla de tiempo.

Bote	Capacidad	Tripulación
1	6	2
2	8	2
3	12	2
4	12	2
5	12	4
6	12	4

Análisis del resultado. Se obtuvo la solución con 4 botes como receptores y los restantes como visitantes. Como punto de referencia se tomo el punto (1,1) obteniéndose el (3,3). El tiempo computacional para este resultado fue de 18 mn 40 ss. Se relajaron 18 restricciones de las desigualdades asociadas a las restricciones de igualdad. La Tabla 15 muestra el resultado.

Tabla 15: Resultados para el problema de tabla de tiempo. *The progressive party problem.*

Receptores	Visitantes	
	3	6
1	3	1
2		2
4	1	3
5	2	

4.4 Despacho económico de carga

Un problema de importancia práctica es el problema de generación de potencia en las centrales termoeléctricas donde un objetivo es minimizar los costos de generación, asignando la potencia adecuada entre las unidades generadoras para satisfacer la demanda, mientras se satisfacen las restricciones operacionales. El problema puede ser formulado como un problema con variables reales o enteras, con el requerimiento de satisfacer la demanda de potencia y límite en la generación de las plantas generadoras. Para una planta con n unidades de generación,

la función de costo total de producción es expresada como

$$Fe = \sum_{i=1}^n Fe_i(P_i) = \sum_{i=1}^n a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i,$$

en la cual Fe_i representa el costo de la unidad i -ésima, P_i la potencia generada por la unidad i -ésima, y a_i, b_i, c_i son los coeficientes característicos de la función objetivo.

Formulación matemática:

$$\min\{Fe\}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n P_i = P_D \quad (20)$$

$$P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max}. \quad (21)$$

Este problema ha sido formulado y resuelto en [17].

Experimento numérico

Un problema con dimensión industrial compuesto por trece generadores en el cual es necesario asignar una demanda de 2520 MW de potencia entre los generadores.

El sistema es caracterizado por las Tablas 16 y 17. Observe que nuestro enfoque MITS ofrece un mejor resultado que el método de gradiente GM del optimizador IMSI-Fortran para optimización no-lineal y una solución competitiva con HGA un algoritmo genético híbrido [17]. El punto de referencia dado fue (2500,2500), observe que este punto de referencia es no alcanzable.

Tabla 16: Datos para el problema despacho económico.

G	p_i^{min}	p_i^{max}	a_i	b_i	c_i
1	0	680	0.00028	8.10	500
2	0	360	0.00056	8.10	309
3	0	360	0.00056	8.10	307
4	60	180	0.00324	7.74	240
5	60	180	0.00324	7.74	240
6	60	180	0.00324	7.74	240
7	60	180	0.00324	7.74	240
8	60	180	0.00324	7.74	240
9	60	180	0.00324	7.74	240
10	40	120	0.00284	8.60	160
11	40	120	0.00284	8.60	160
12	55	120	0.00284	8.60	160
13	55	120	0.00284	8.60	160

Tabla 17: Resultados para el problema despacho económico.

	GM	HGA	MITS
p_1 (MW)	643.879	651.879	678.000
p_2 (MW)	330.139	319.982	360.000
p_3 (MW)	309.510	320.463	360.000
p_4 (MW)	124.530	137.776	180.000
p_5 (MW)	145.163	156.688	158.667
p_6 (MW)	150.725	147.007	169.333
p_7 (MW)	160.154	159.165	128.000
p_8 (MW)	172.157	145.378	156.000
p_9 (MW)	176.949	151.551	140.000
p_{10} (MW)	62.554	82.259	40.000
p_{11} (MW)	92.889	86.320	40.000
p_{12} (MW)	62.634	82.893	55.000
p_{13} (MW)	88.715	79.368	55.000
F.O.(pesos/h)	24703.32	24111.69	24132.497
Total	2500	2500	2500

5 Escalamiento de los problemas

En esta sección realizamos experimentos computacionales para los problemas de *Tabla de Tiempo y Transportación con Dos Etapas*. Aumentando el número de variables y de restricciones de estos problemas.

5.1 Tabla de tiempo

Analicemos el siguiente escenario: Se tienen 10 botes y se requiere seleccionar un subconjunto de botes visitantes para 4 periodos de tiempo. Esta instancia genera un conjunto de 410 variables binarias y 570 restricciones tomando en consideración que las igualdades son descompuestas en dos restricciones de desigualdades. Los datos vienen dados en la Tabla 18.

Tabla 18: Datos para el problema de tabla de tiempo. *The progressive party problem*.

Bote	Capacidad	Tripulación
1	6	2
2	8	2
3	12	2
4	12	2
5	12	4
6	12	4
7	12	4
8	10	1
9	10	2
10	10	2

Análisis del resultado. Se obtuvo 1 solución seleccionándose 6 botes como receptores y los restantes como visitantes. Como punto de referencia se tomó el punto (1,1). El tiempo computacional para este resultado fue de 75 mn. Se relajaron 20 restricciones de las desigualdades asociadas a las restricciones de igualdad. La Tabla 19 muestra el resultado.

Tabla 19: Resultados para el problema de tabla de tiempo. *The progressive party problem*. Las entradas de la tabla representan los períodos.

<i>Receptores</i>	<i>Visitantes</i>			
	2	4	8	10
1				
3		4	4	4
5	1		2	3
6	4	2		
7	3	3	1	1
9	2	1	3	2

5.2 Transportación con dos etapas

El siguiente problema es el de transportación-distribución con dos etapas. En el mismo experimentamos con un problema con grandes cantidades de variables enteras y un mayor número de restricciones que en el presentado en la sección 4. El problema ahora consiste en la transportación y distribución con 10 plantas, 20 centros de distribución y 40 clientes, este escenario produce 1020 variables enteras y 73 restricciones.

La Figura 5 muestra las fronteras de soluciones no dominadas encontradas por nuestro algoritmo en 54 mn 45 ss y 48 mn 30 ss respectivamente. El cuadro de la izquierda muestra la frontera para el punto de referencia no alcanzable (5,5) y a la derecha la gráfica para el punto de referencia alcanzable (3419,3429). Observe que en ambos casos el algoritmo es capaz de hallar soluciones factibles en un tiempo relativamente corto para las dimensiones del problema planteado. También, el analista no tiene la necesidad de tener una experiencia del sistema para dar un punto de referencia, el punto de referencia puede ser no alcanzable.

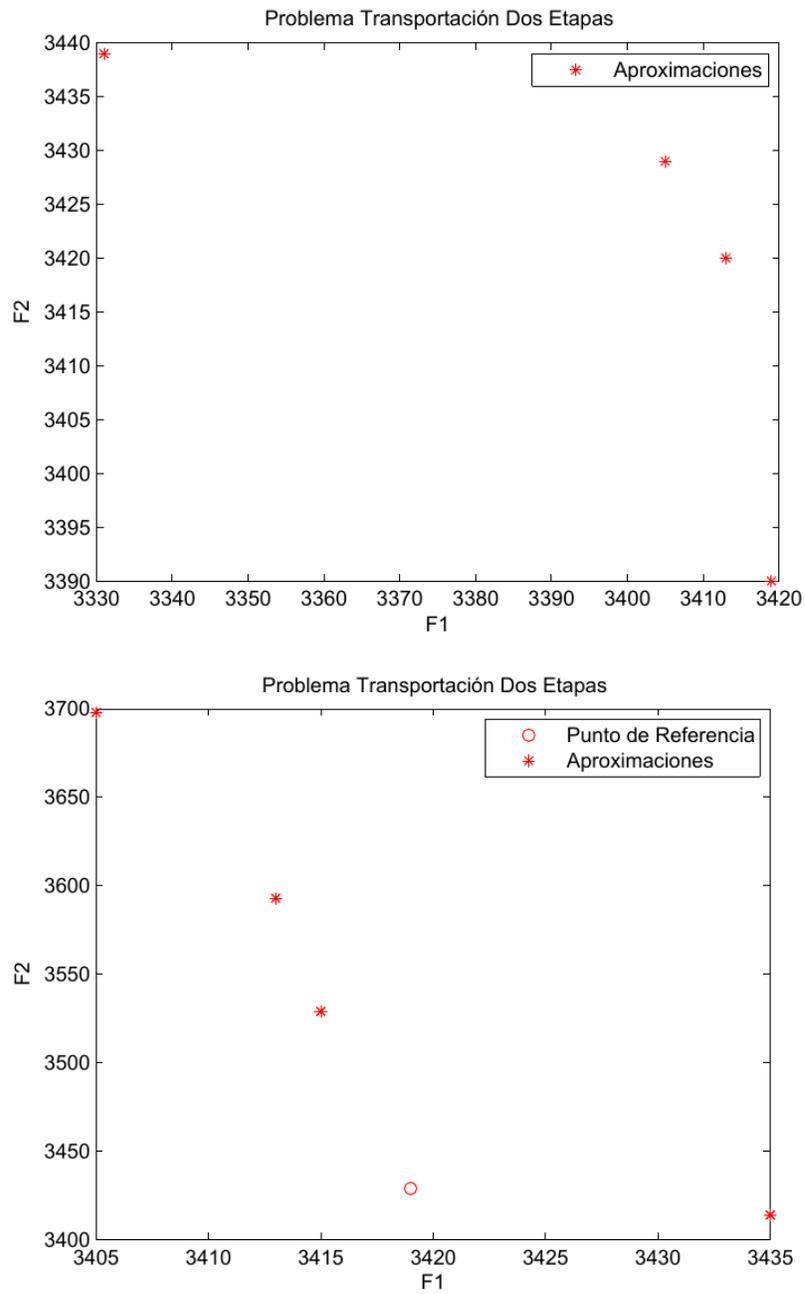


Figura 5: Problema transportación-distribución con dos etapas.

6 Conclusiones

La combinación de diferentes estrategias, en especial el tratamiento de las restricciones, permite solucionar diversos tipos de problemas de diferentes dominios con restricciones heterogéneas y gran cantidad de variables, lo que demuestra la independencia del dominio y aplicabilidad de nuestro algoritmo. Las soluciones obtenidas en cada uno de los problemas resueltos demuestran que los objetivos de hallar soluciones factibles que aproximen las preferencias de los decisores, así como hallar soluciones no dominadas en esa dirección se cumplen. Tales resultados permiten pensar ampliar el trabajo a más de dos objetivos. La Tabla 20 refleja en negritas las cantidades máxima y mínima de variables y restricciones respectivamente. Todos los experimentos se llevaron a efecto en un PC de 3.2 GHz.

Tabla 20: Resumen.

Problema	Dominio	Variables	Retricciones	Objetivos
Mochila	0-1	100, 150	2(\leq)	2
Cubrimiento	0-1	100, 200	10(\geq)	2
Particionamiento	0-1	100	10(=)	2
Camino más Corto	0-1	121	22(=)	2
Transportación_cf	enteros	56	15($\leq \geq$)	2
Loc-Asignación	mixtos	54	35($\leq \geq$)	2
Distribución 2etapas	enteros	1020	73($= \leq \geq$)	2
Distribución flexible	enteros	72	18($= \leq \geq$)	2
Tabla de Tiempo	0-1	410	570 ($= \leq \geq$)	2
Despacho de Carga	reales	13	1(=)	1

Referencias

- [1] Balas, E.; Padberg, M. (1976) "Set partitioning: a survey", *SIAM Review* **18**(4): 710–760.
- [2] Beausoleil, R.P. (2014) "Interactive multiobjective tabu/scatter search based on reference point", *Revista de Matemática : Teoría y Aplicaciones* **21**(2): 261–282.

- [3] Campos, V.; Laguna, M.; Martí, R. (2005) "Context-independent scatter and tabu search for permutation problems", *INFORMS Journal on Computing* **17**(1): 111–122.
- [4] Davis, E.W.; Patterson, J.H. (1975) "A comparison of heuristic and optimum solutions in resource constrained project scheduling", *Management Science* **21**(8): 944–955.
- [5] Deb, K.; Sundar, J.; Bhaskara, U.; Chaudhuri, S. (2006) "Reference point based multi-objective optimization using evolutionary algorithms", *International Journal of Computational Intelligence Research (IJCIR)* **2**(3): 273–286.
- [6] Elmaghraby, S.E.; Moder, J.J. (1977) *Handbook of Operations Research*.
- [7] Geoffrion, A.M.; Graves, G.W. (1974) "Multicommodity distribution system design by benders decomposition", *Management Science* **20**(5): 822–844.
- [8] Glover, F.; Laguna, M. (1997) "General purpose heuristics for integer programming part I", *Journal of Heuristics* **2**(4): 343–358.
- [9] Greenwood, G.W.; Hu, X.S.; D'Ambrosio, J.G. (1997) "Fitness functions for multiple objective optimization problems: combining preferences with Pareto rankings", in: R.K. Belew & M.D. Vose (Eds.) *Foundations of Genetic Algorithms*, San Francisco: 437–455.
- [10] Hitchcock, F.L. (1941) "The distribution of a product from several sources to numerous localities", *Studies in Applied Mathematics* **20**(1-4): 224–230.
- [11] Jaskiewicz, A. (2004) "A comparative study of multiple-objective meta-heuristics on the bi-objective set covering problem and the pareto memetic algorithm", *Annals of Operation Research* **131**(1-4): 135–158.
- [12] Kelly, J.P.; Xu, J. (1999) "A set-partitioning-based heuristic for the vehicle routing problem", *INFORMS Journal on Computing* **11**(2): 161–172.
- [13] Laguna, M.; Gortázar F.; Gallego, M.; Martí, R. (2014) "A black-box scatter search for optimization problems with integer variables", *Journal of Global Optimization* **58**(3): 497–516.
- [14] Laguna, M.; Martí, R. (2003) *The OptQuest Callable Library*, in: S. Voss & D.L. Woodruff (Eds.) *Optimization Software Class Libraries*, Kluwer Academic Publishers, Boston: 193–218.

- [15] Michalewicz, Z. (1995) "A survey of constraint handling techniques in evolutionary computation methods", in: *Proceedings of the 4th Annual Conference on Evolutionary Programming*, MIT Press Cambridge MA, Estados Unidos: 135–155.
- [16] Mitsuo, G.; Runwei, G.; Lin, L. (2008) *Network Models and Optimization: Multiobjective Genetic Algorithms Approach*. Springer-Verlag London, Reino Unido.
- [17] Samed, M.M.A.; Ravagnani, M.A. da S.S. (2008) "Coevolutionary genetic algorithm to solve economic dispatch", in: P. Siarry & Z. Michalewicz (Eds.) *Advances in Metaheuristics for Hard Optimization, Natural Computing Series*, Springer Berlin Heidelberg: 317–327.
- [18] Smith, B.; Brailsford, S.; Hubbard, P.; Williams, H. (1996) "The progressive party problem: Integer linear programming and constraint programming compared", *Constraints* **1**(1-2): 119–138.
- [19] Walser J.P. (1999) *Integer Optimization by Local Search: A Domain-Independent Approach*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Alemania.
- [20] Wierzbicki, A.P. (1982) "A mathematical basis for satisficing decision making", *Mathematical Modelling* **3**(5): 391–405.
- [21] Zitzler, E.; Laumanns, M. (2001) "Test problems for multiobjective optimizers". Institute TIK, Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, Switzerland.
- [22] Zitzler E.; Thiele, L. (1999) "Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **3**(4): 257–271.