REVISTA DE MATEMÁTICA: TEORÍA Y APLICACIONES 2014 **21**(2) : 167–187
CIMPA – UCR ISSN: 1409-2433

G -ESTRUCTURAS DE ORDEN SUPERIOR

SUPERIOR ORDER G -STRUCTURES

JOSÉ ROSALES-ORTEGA*

Received: 18/Mar/2011; Revised: 17/Dec/2013;
Accepted: 15/Jan/2014

*School of Mathematics, Instituto Tecnológico de Costa Rica y Universidad de Costa Rica, Costa Rica. E-Mail: jose.rosales@ucr.ac.cr

Resumen

Estudiamos los rudimentos básicos sobre G-estructuras de orden superior, y luego probamos que el conjunto de automorfismos infinitesimales de una G-estructura geométrica sobre una variedad M es un grupo de Lie.

Palabras clave: haz fibrado principal; haz asociado; G-estructura.

Abstract

In this article we study the basic facts about superior order G-structures, then we show that the set of infinitesimally automorphisms of a geometric G-structure is a closed Lie group.

Keywords: principal fiber bundle; associated bundle; G-structure.

Mathematics Subject Classification: 53C05; 53C10.

1 Introducción

Las G-estructuras geométricas han sido ampliamente estudiadas por varios autores, entre ellos ([1], [4],[5]). A nivel de G-estructuras de orden superior se han realizado trabajos importantes, entre ellos el celebrado teorema del Centralizador de Gromov ([5], [4],[8]). En este trabajo introducimos las G-estructuras de orden superior, algunas de sus propiedades y posteriormente probamos una caracterización en términos de secciones de un haz asociado y no como mapeos equivariantes sobre la acción de cierto grupo. Concluímos probando que el conjunto de automorfismos infinitesimales es un grupo de Lie cerrado. Asumiremos que el lector conoce lo básico de geometría diferencial a como viene establecido en [6].

La estructura del presente trabajo es la siguiente: en primer lugar vamos a mencionar lo básico referente a haces fibrados principales, haces asociados y secciones. En esta parte definimos lo que es una G-estructura. Posteriormente, mencionaremos lo referente a *jets* y la definición del haz de marcos de orden superior. En la penúltima parte definimos el concepto de G-estructura de orden superior, algunas propiedades, y concluimos con un estudio de cierto haz fibrado principal que aparece en nuestro trabajo.

2 Haces fibrados principales y G-estructuras

Dada una variedad M y un grupo de Lie G, un *haz fibrado principal* sobre M con grupo estructura G consiste de una variedad P y una acción de G sobre P la cual cumple las siguientes propiedades:

(PB1) G actúa libremente a la derecha de P: $(u,a) \in P\times G \to ua = R_a u \in P$.

(PB2) M es el espacio cociente de P bajo la relación de equivalencia que induce G, $M = P/G$ y $\pi : P \to M$ es diferenciable.

(PB3) P es localmente trivial, es decir que para cada punto $x \in M$ existe un abierto U tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo con $U\times G$ en el sentido de que existe un difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tal que $\psi(u) = (\pi(u), \phi(u))$, donde $\phi : \pi^{-1}(U) \to G$ satisface $\phi(ua) = \phi(u)a$ para todo $u \in \pi^{-1}(U)$ y $a \in G$.

Denotaremos a un haz fibrado principal por $P(M,G,\pi)$.

El ejemplo de haz fibrado principal a tener en cuenta a lo largo de este artículo lo constituye el llamado haz de marcos de orden 1.

Dada una variedad M denotamos

$$L(M) = \{u : \mathbb{R}^n \to T_p(M)/p \in M,\ u \text{ es isomorfismo lineal}\} \tag{2.1}$$

Consideremos el grupo de Lie, GL(n), constituido por las matrices invertibles de tamaño $n \times n$, o en su defecto, isomorfismos lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Podemos definir una acción de GL(n) sobre $L(M)$ de la siguiente forma:

$$(u,A) \in L(M) \times \mathrm{GL}(n) \to u \circ A \in L(M).$$

Dado $u \in L(M)$ con $u(\mathbb{R}^n) = T_p(M)$ definimos $\pi : L(M) \to M$ por $\pi(u) = p$.

Es claro que π es el mapeo cociente de la acción de $Gl(n)$ sobre $L(M)$. Esto se comprueba al mostrar que las órbitas están en las fibras, es decir que se cumple la igualdad $\pi^{-1}(\pi(u)) = uGl(n)$ para $u \in L(M)$.

Dada $\{U, \phi = (x^1, \cdots, x^n)\}$ una carta sobre M definimos $\lambda_\phi : U\times Gl(n) \to \pi^{-1}(U)$ por $(x,A) \mapsto d\phi^{-1}_{\phi(x)} \circ A$.

En resumen, al cuadrúple formado por $L(M)(M, \mathrm{GL}(n), \pi)$ se le conoce como haz de marcos de orden 1, y es un haz fibrado principal.

Definición 1 *Un homomorfismo f entre haces fibrados principales $P_1(M_1,G_1,\pi_1)$ y $P_2(M_2,G_2,\pi_2)$ consiste de*

- *un mapeo $f_1 : P_1 \to P_2$ suave,*
- *un homomorfismo $\rho : G_1 \to G_2$, y tal que*
- *f_1 es ρ-equivariante, es decir $f_1(ua) = f_1(u)\rho(a)$, para todo $u \in P, a \in G_1$.*

Por la equivariancia se deduce que cada homomorfismo f de haces fibrados principales envía cada fibra de P_1 en una fibra de P_2, luego se induce un mapeo cociente al que llamaremos $f_0 : M \to M$, y tal que $\pi_2 \circ f_1 = f_0 \circ \pi_1$.

Definición 2 *Sea $P(M, G, \pi)$ un haz fibrado principal. Una reducción de P es un haz fibrado principal $Q(M, H, \pi_Q)$ junto con un homomorfismo entre Q y P de tal manera que*

- *$\rho : H \to G$ es monomorfismo de grupos,*
- *$f_1 : Q \to P$ es inmersión inyectiva,*
- *$f_0 = Id_M$.*

Es común llamarles a las reducciones, definidas anteriormente, H-reducciones. Vamos a exhibir una reducción del haz $L(M)(M, \mathrm{GL}(n), \pi)$.

Si g es una métrica Riemanniana sobre M, la cual siempre existe por ser M suave, se define

$$\mathcal{O}(M, g) = \{u \in L(M)/u : \mathbb{R}^n \to (T_p(M), g_p) \text{ es isometría}\}.$$

Se afirma que $\mathcal{O}(M, g)(M, O(n), \pi)$ es una reducción de $L(M)(M, \mathrm{GL}(n), \pi)$, donde $O(n)$ es el grupo ortogonal. Para tal efecto, se tiene que $f_1 : \mathcal{O}(M, g) \hookrightarrow L(M)$ y $\rho : O(n) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n)$.

Pasamos a continuación a definir el concepto de G-estructura.

Definición 3 *Una G-estructura es una G-reducción del haz $L(M)(M, GL(n), \pi)$.*

Definición 4 *Una sección de un haz fibrado principal $P(M, G, \pi)$, sobre un abierto $U \subset M$, es un mapeo suave $\sigma : U \to P$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_U$.*

Como consecuencia de la definición anterior σ es inmersión inyectiva, y por lo tanto U es subvariedad de P vía σ.

La proposición siguiente establece que básicamente secciones y trivializaciones están en correspondencia biyectiva. En efecto,

Proposición 1 *Existe una correspondencia biyectiva entre secciones de P sobre U y trivializaciones de P sobre U.*

Prueba. Dada una sección σ, de P sobre U, produciremos una trivialización local de P. Esto se logra al definir $\psi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ por medio de $\psi(x, g) = \sigma(x)g$. Claramente tal asignación es inyectiva, ya que si $\psi(x, g) = \psi(y, h)$, entonces $\sigma(x)g = \sigma(y)h$, luego $\pi(\sigma(x)) = \pi(\sigma(y))$, y de esto se sigue que

$x = y$. Por otra parte, como la acción es libre, se concluye que $g = h$. La sobreyectividad es casi inmediata. En efecto, sea $u \in \pi^{-1}(U)$, luego $\pi(u) \in U$, y de esto se concluye que $\sigma(\pi(u)) \in \pi^{-1}(\pi(u))$, y por lo tanto $\sigma(\pi(u)) = ug_1$, para algún $g_1 \in G$. Al tomar $(\pi(u), g_1^{-1}) \in U \times G$ se comprueba que $\psi(\pi(u), g_1^{-1}) = u$.

Por otra parte si $\psi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ es una trivialización local de P, entonces $\sigma(x) = \psi(x, e)$ es una sección local de P sobre U. ■

Dado un haz fibrado principal $P(M, G, \pi)$ podemos construir el llamado haz fibrado asociado $E(M, F, G, P)$. Este es un concepto muy importante ya que eventualmente ciertos haces resultan ser haces asociados, por ejemplo, al haz de marcos lineales.

Para construir el haz asociado la idea es considerar una variedad F y hacer actuar G sobre F a la izquierda: $(a, \xi) \in G \times F \to a\xi \in F$. Sobre $P \times F$ hacemos actuar G a la derecha:

$$(u, \xi, a) \in P \times F \times G \to (ua, a^{-1}\xi) \in P \times F.$$

Al espacio cociente de $P \times F$ por esta acción le llamaremos

$$E_F = (P \times F)/G = P \times_G F.$$

El mapeo $P \times F \to M$ que envía (u, ξ) en $\pi(u)$ induce otro que llamaremos $\pi_E : E_F \to M$ dado por $\pi_E([u, \xi]) = \pi(u)$. La buena definición de tal mapeo se deduce de lo siguiente: si $[u, \xi] = [u_1, \xi_1]$, entonces existe $a \in G$ tal que se cumple$(u_1, \xi_1) = (ua, a^{-1}\xi)$. Luego $\pi(u_1) = \pi(ua) = \pi(u)$.

Proposición 2 *El triplete (E, M, π_E) es un haz fibrado con fibra estándar F y grupo esctructura G.*

Prueba. Sea $U \subset M$ abierto para el cual existe una trivialización $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$. Esta induce el mapeo $\overline{\phi} : \pi^{-1}(U) \times F \to U \times G \times F$ por medio de $\overline{\phi}(u, \xi) = (\phi(u), \xi)$.

En $U \times G \times F$ consideramos la acción

$$(x, a, \xi, h) \in U \times G \times F \times G \longrightarrow (x, ah, h^{-1}\xi) \in U \times G \times F.$$

Se sigue de lo anterior que $\overline{\phi}$ es G-equivariante, ya que

$$\begin{aligned} \overline{\phi}((u, \xi)a) &= \overline{\phi}(ua, a^{-1}\xi) \\ &= (\phi(ua), a^{-1}\xi) \\ &= (\phi(u)a, a^{-1}\xi) \\ &= (\phi(u), \xi)a \\ &= \overline{\phi}(u, \xi)a. \end{aligned}$$

A su vez $\overline{\phi}$ induce otro mapeo $\widetilde{\phi} : (\pi^{-1}(U) \times F)/G \to (U \times G \times F)/G$ dado por

$$\widetilde{\phi}([u, \xi]) = [\phi(u), \xi].$$

Observemos que $\widetilde{\phi}$ es biyección debido a que ϕ lo es.

Es claro que $(\pi^{-1}(U) \times F)/G = \pi_E^{-1}(U)$, y luego $\widetilde{\phi} : \pi_E^{-1}(U) \to (U \times G \times F)/G$.

Considere el mapeo $\psi : U \times F \to (U \times G \times F)/G$ dado por $\psi(u, \xi) = [u, e, \xi]$. Vamos a mostrar que este mapeo es biyectivo.

En efecto, la inyectividad se sigue ya que si

$$\begin{aligned} \psi(u, \xi) = \psi(u_1, \xi_1) \quad &\Rightarrow \quad [u, e, \xi] = [u_1, e, \xi_1] \\ &\Rightarrow \quad (u_1, e, \xi_1)a = (u, e, \xi) \\ &\Rightarrow \quad (u_1, ea, a^{-1}\xi_1) = (u, e, \xi) \\ &\Rightarrow \quad (u, \xi) = (u_1, \xi_1). \end{aligned}$$

La sobreyectividad se obtiene de lo siguiente, si $[u, g, \xi] \in (U \times G \times F)/G$, entonces

$$[u, g, \xi] = [u, e, g\xi] = [u, gg^{-1}, g\xi].$$

En resumen, si $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ es una trivialización, entonces de lo anterior podemos definir un mapeo $\widehat{\phi} = \psi^{-1} \circ \widetilde{\phi} : \pi_E^{-1}(U) \to U \times F$. Si $\phi(u) = (\pi(u), \phi_0(u))$, como en la definición de trivialización local previamente dada, entonces $\widehat{\phi}[u, \xi] = (\pi(u), \phi_0(u)^{-1}\xi)$.

Definimos una estructura de variedad sobre E al tomar como cartas a los mapeos $\widehat{\phi} = \psi^{-1} \circ \widetilde{\phi}$. También damos a (E, M, π_E) estructura de haz fibrado al tomar los mapeos anteriores como trivializaciones.

Para ser explícito, sean $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ y $\psi : \pi^{-1}(V) \to V \times G$ dos trivializaciones locales, entonces por lo dicho anteriormente se obtienen los mapeos $\widehat{\phi} : \pi_E^{-1}(U) \to U \times F$ y $\widehat{\psi} : \pi_E^{-1}(V) \to V \times F$. Ahora bien, el mapeo de transición $\widehat{\phi} \circ \widehat{\psi}^{-1} : (U \cap V) \times F \to (U \cap V) \times F$ viene dada por

$$\widehat{\phi} \circ \widehat{\psi}^{-1}(x, \xi) = (x, \phi_0(u)\psi_0(u)^{-1}\xi), \qquad \text{donde } \pi(u) = x.$$

Teniendo en cuenta que el mapeo $x \mapsto \phi_0(u)\psi_0(u)^{-1}$ es la función de transición de $\phi \circ \psi^{-1}$, se sigue que E posee una estructura de variedad bien definida.

También es claro que $\widehat{\phi}$ lleva fibras en fibras, esto se prueba al notar que se cumple la siguiente igualdad $\pi_1 \circ \widehat{\phi} = \pi_E$, donde π_1 es la proyección sobre la primer coordenada. ■

Denotaremos por $u\xi$ el efecto del mapeo cociente $P \times F \to P \times_G F$ sobre (u, ξ), es decir, $[u, \xi] = u\xi$, pensada como algún tipo de acción. Dado $u_0 \in P$, consideremos el mapeo $u_0 : F \to \pi_E^{-1}(\pi(u_0)) \subset P \times_G F$ dado por $\xi \mapsto u_0\xi$.

Observemos que

$$\begin{aligned}\pi_E(u_0\xi) &= \pi_E([u_0,\xi])\\ &= \pi(u_0\xi)\\ &= \pi(u_0),\end{aligned}$$

de donde se concluye que $u_0F \subset \pi_E^{-1}(\pi(u_0))$.

Proposición 3 *Sea $P(M,G,\pi)$ un haz fibrado principal, y F una variedad sobre la cual G actúa a la izquierda. Sea $E(M,F,G,P)$ el haz asociado con P. Entonces cada $u_0 \in P$ es un difeomorfismo de F sobre $F_x = \pi_E^{-1}(x)$, donde $x = \pi(u_0)$, y*

$$(ua)\xi = u(a\xi), \qquad \textit{para } u \in P,\ a \in G,\ y\ \xi \in F.$$

Prueba. En primer lugar probamos que u_0 es biyectiva. La sobreyectividad es inmediata ya que todo elemento en F_x es de la forma $[u_0,\xi] = u_0\xi$. Por otra parte, la inyectividad se obtiene de la siguiente forma. Si $u_0\xi = u_0\xi_1$, entonces $[u_0,\xi] = [u_0,\xi_1]$, y por definición existe $g \in G$ tal que $(u_0,\xi_1) = (u_0,\xi)g$. Se deduce entonces que $u_0 = u_0g$ y $\xi_1 = \xi g$, y por lo tanto, $g = e$ y $\xi = \xi_1$.

Por otra parte, u_0 es suave ya que es la restricción del mapeo cociente, el cual es suave. La inversa es suave al notar que usando trivializaciones $\phi, \widehat{\phi}$ que u_0 corresponde con algún $g_0 \in G$. ■

Por el resultado anterior podemos hablar de difeomorfismo de una fibra F_x sobre otra fibra F_y. Sean $x, y \in M$ y escojamos $u \in \pi^{-1}(x), v \in \pi^{-1}(y)$. Entonces el mapeo $v \circ u^{-1} : \pi_E^{-1}(x) \to u \in \pi_E^{-1}(y)$ es un difeomorfismo y es llamado un isomorfismo de fibras.

En el caso $x = y$, diremos que $v \circ u^{-1}$ es un automorfismo. En este caso, $v = ug$ para algún $g \in G$, y los automorfismos son de la forma $u \circ g \circ u^{-1}$.

Si $P(M,G)$ es un haz fibrado principal y H es un subgrupo cerrado de G, entonces G actúa a la izquierda sobre el grupo cociente G/H, de tal forma que $g(g_1H) = gg_1H$. Esto a su vez da lugar a la variedad $E = P \times_G (G/H)$. También obtenemos el par $P/H \to M$ donde el mapeo es inducido por $P \to M$. Aquí debe tenerse en cuenta que siendo H subgrupo de G, podemos hacer actuar a H sobre P a la derecha. Denotamos por P/H al espacio cociente de P por esta acción de H.

Proposición 4 *El mapeo $\phi : P \times_G (G/H) \to P/H$ definido por $\phi([u,gH]) = [ug]$ es un difeomorfismo de haces fibrados. Además $P(P/H,H))$ es un haz fibrado pincipal.*

Prueba. Probaremos que ϕ está bien definida. En efecto, si suponemos que $[u, gH] = [u_1, g_1H]$ se sigue que existe g_0 tal que $(u_1, g_1H) = (ug_0, g_0gH)$. Por lo tanto, $u_1 = ug_0$ y existe $h \in H$ tal que $g_1 = g_0^{-1}gh$. De esto concluimos que $[u_1g_1] = [ug]$. Claramente ϕ es suave, y como H actúa libre y propiamente se concluye que $P(P/H, H))$ es un haz fibrado pincipal. ■

Definición 5 *Sea $E(M, \pi_E)$ un haz asociado de un haz fibrado principal. Una sección suave de E es un mapeo suave, $\sigma : M \to E$, tal que $\pi_E \circ \sigma = I_M$.*

Proposición 5 *Sea $P(M, G)$ un haz fibrado principal y H un subgrupo cerrado de G. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de reducciones Q de P a H y el conjunto de secciones $\sigma : P/H \to M$. En particular, P admite una H-reducción si, y sólo si existe sección $\sigma : M \to P/H$.*

Prueba. Sea $Q \subseteq P$ una H reducción. Denotemos con $\mu : P \to P/H$ al mapeo cociente. Si $u \in Q$ y $h \in H$, entonces $\mu(uh) = \mu(u)$. Por lo tanto, $\mu|_Q : Q \to P/H$ es constante en las fibras de $Q \to M$. Entonces existe un único mapeo suave $\sigma : M \to P/H$ tal que $\sigma \circ \pi = \mu$,y además σ es sección.

Recíprocamente, sea $\sigma : M \to P/H$ sección. Para todo $x \in M$ se tiene que $\pi_{P/H}^{-1}(x) \cong P/H$ y $\sigma(x) \in \pi_{P/H}^{-1}(x)$. Definamos

$$\begin{aligned} Q &= \{u \in P : \mu(u) = \sigma(\pi(u))\} \\ &= \mu^{-1}(\sigma(M)) \end{aligned}$$

que es H-reducción. ■

Vamos a dar un ejemplo de cómo se puede aplicar la teoría anterior. Toda métrica Riemanniana g en una variedad M es una sección de $T^*M \otimes T^*M$ simétrica y definida positiva.

Sea $E = \{\lambda \in T^*M \otimes T^*M : \lambda \text{ es simétrica y definida positiva.}\}$. Entonces E es un haz fibrado y toda ḿetrica Riemanniana g es una sección de $E \to M$.

Sean $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}/B \text{ es bilineal}\}$, y $F = \{B \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : B \text{ es simétrica y definida positiva}\}$. Hagamos actuar al grupo $\mathrm{GL}(n)$ sobre F a la izquierda: $\mathrm{GL}(n) \times F \to F$ dada por $(A, B) \mapsto ABA^t$. Esta acción es transitiva, y por lo tanto se concluye que

$$F = \mathrm{GL}(n)/H,$$

donde H es el subgrupo de isotropía de la identidad en $\mathrm{GL}(n)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \text{isotropía de } I &= \{A \in \mathrm{GL}(n) : A \cdot I = I\} \\ &= \{A \in \mathrm{GL}(n) : AIA^t = I\} \\ &= O(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $F = \mathrm{GL}(n)/O(n)$. Suponiendo que E sea el haz asociado de $L(M) \to M$, con fibra estándar F con la acción anterior, se concluye que

$$E = L(M) \times_{\mathrm{GL}(n)} (\mathrm{GL}(n)/O(n)).$$

Ahora bien, ya sabemos que E no es otra cosa que $L(M)/O(n)$, y por el resultado anterior se puede concluir que

$$\{\text{secciones de } L(M)/O(n)\} \leftrightarrow \{\ O(n)\text{-reducciones de } L(M)\}.$$

El siguiente resultado ofrece una caracterización alternativa cuyo valor será apreciado más adelante al trabajar con estructuras geométricas.

Proposición 6 *Existe una correspondencia biyectiva entre*

$$\{\textit{secciones de } P \times_G F \to M\} \leftrightarrow \{\ \textit{mapeos } G\textit{- equivarientes } P \to F\}.$$

Prueba. Sea $\sigma : M \to P \times_G F$ sección. Dado cualquier $u \in P$ existe un único $\lambda(u) \in F$ tal que $\sigma(\pi(u)) = [u, \lambda(u)]$. La unicidad es inmediata ya que si $[u, \lambda(u)] = [u_1, \lambda_1(u)]$, entonces existe $g \in G$ tal que $u = ug$ y $\lambda_1(u) = g^{-1}\lambda(u)$. Por ser la acción libre se concluye que $g = e$ y por lo tanto $\lambda(u) = \lambda_1(u)$. La existencia es también inmediata y se basa en el hecho de que $\sigma(x) \in \pi_E^{-1}(x)$ para $x \in M$, y claramente se usa el hecho de que σ es sección.

Por otra parte, si $\lambda : P \to F$ es G-equivariante, entonces $\sigma : M \to P \times F$ dada por $\sigma(\pi(u)) = [u, \lambda(u)]$ es sección. ∎

3 Espacios de jets

Vamos a definir el concepto de jets para funciones suaves entre espacios vectoriales, y mucho de lo hecho en las secciones anteriores se generalizará para el haz de marcos de dimensión mayor que uno.

Sea $\phi : V \to W$ un mapeo suave entre espacios vectoriales. Recordemos que $D\phi : V \to L(V; W)$, y que por lo tanto $D\phi(x) \in L(V; W)$. En general, $D^k\phi : V \to L^k(V, W)$, donde $L^k(V; W)$ es el espacio vectorial de mapeos k-lineales de $V \times \cdots \times V$ en W. Nos interesa el caso donde $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$.

Definición 6 *Sean $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mapeos suaves. Diremos que $\phi \sim^k \psi$ en el punto x_0 si, y sólo si se cumple simultáneamente las siguientes condiciones: $\phi(x_0), = \psi(x_0), D\phi(x_0) = D\psi(x_0), \ldots, D^k\phi(x_0) = D^k\psi(x_0)$.*

Es claro que $\sim^k$ es una relación de equivalencia, y a sus clases de equivalencia las denotaremos por $j^k_{x_0}(\phi)$. También denotamos por $J^k_{x_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ al conjunto de tales clases de equivalencia.

Denotaremos con $S^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ al espacio vectorial de las transformaciones i-lineales simétricas de $(\mathbb{R}^n)^i$ en $\mathbb{R}^m$.

El siguiente lema indica la relación existente entre los siguientes conjuntos $J^k_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $\prod_{i=0}^k S^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Lema 1 *Existe una biyección entre los conjuntos* $J^k_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *y* $\prod_{i=0}^k S^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Prueba. Definamos el mapeo $\lambda : J^k_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \prod_{i=0}^k S^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ por

$$\lambda(j^k_0(\phi)) = (\phi(0), D\phi(0), \ldots, D^k\phi(0)).$$

La inyectividad es obvia, y sigue de la mera definición. Para la sobreyectividad, sea $(A_0, A_1, \ldots, A_k) \in \prod_{i=0}^k S^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Definamos

$$\phi(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} A_i(x, \ldots, x).$$

Es claro que $\phi(0) = A_0$, ya que por ejemplo $A_1(0) = 0$, por ser lineal, y luego $A_2(0) = 0$ ya que A_2 es bilineal simétrica , y así sucesivamente. Por otra parte, $D\phi(0) = A_1$ ya que $DA_0 = 0$, y como $DA_1(0) = A_1(0) = 0$. Lo otro es igual... ■

La estructura de espacio vectorial sobre las funciones suaves de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ induce una estructura de espacio vectorial sobre $J^k_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, luego el mapeo definido en el lema anterior es un isomorfismo. De esto podemos deducir que $J^k_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es una variedad suave.

Definición 7 *Sean M y N variedades suaves, y $k \geq 0$ un entero. Diremos que $\phi, \psi : N \to M$, mapeos suaves, se relacionan y escribiremos $\phi \sim^k \psi$ en el punto x_0 si, y sólo si, ϕ y ψ poseen las mismas derivadas parciales hasta el orden k en x_0.*

La definición anterior establece que si (U, α) es una carta alrededor de x_0 y (V, β) es carta alrededor de $\phi(x_0) = \psi(x_0)$ entonces $\beta \circ \phi \circ \alpha^{-1} \sim^k \beta \circ \psi \circ \alpha^{-1}$ en el punto $\alpha(x_0)$.

Denotaremos por $j^k_x(\phi)$ a la $\sim^k$-clase de equivalencia de ϕ en el punto x, y lo llamaremos el k-jet de ϕ en x. Al conjunto de todos los k-jets en el punto x lo denotaremos por $J^k_{x_0}(N, M)$.

Lema 2 *Sean M y N variedades suaves, $x \in M$, y $k \geq 0$ un entero. Entonces $J^k_x(N, M)$ es variedad suave.*

Prueba. Sea (U, α) carta de N con $x \in U$, y sea (V, β) carta de M.

Definamos el siguiente mapeo, $\lambda_{\alpha,\beta}$, entre $J^k_x(U, V)$ y $J^k_{\alpha(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dado por

$$\lambda_{\alpha,\beta}(j^k_0(f)) = j^k_{\alpha(x)}(\beta \circ f \circ \alpha^{-1}).$$

Observemos que λ es biyección. Definamos la topología de $J^k_x(N, M)$ como la generada por los $J^k_x(U, V) \subset J^k_x(N, M)$.

Las cartas están dadas por las biyecciones $\lambda_{\alpha,\beta}$. Los cambios de coordenadas nos dan los cambios para las derivadas parciales, los cuales son suaves. ∎

Adoptaremos como notación a $J^k_n(Q) = J^k_0(\mathbb{R}^n, Q)$, el cual es variedad si Q lo es por el lema anterior.

Si $k \geq l$ son enteros positivos, entonces tenemos mapeos suaves naturales $\pi^k_l : J^k_x(N, M) \to J^l_x(N, M)$ dados por $\pi^k_l(j^k_x(\phi)) = j^l_x(\phi)$.

Observemos que $J^1_n(\mathbb{R}^n)$ no es más que el conjunto de pares ordenados (v, L) donde $v \in \mathbb{R}^n$ y $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal, luego podemos concluir que $J^1_n(\mathbb{R}^n) = J^1_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. En este espacio podemos considerar el subconjunto de los $j^1_0(\phi)$ tales que $\phi(0) = 0$, es decir $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. En este último definimos el producto $j^1_0(\phi) \cdot j^1_0(\psi) = j^1_0(\phi \circ \psi)$. La regla de la cadena nos dice que tal producto corresponde a la composición de transformaciones lineales en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ahora bien, usando lo anterior podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n) =& \{j^1_0(\phi) : \phi(0) = 0,\ d\phi_0 \text{ invertible}\} \\ =& \{j^1_0(\phi) : \phi(0) = 0,\ \phi \text{ es difeo. local en } 0.\} \end{aligned}$$

Lo anterior se puede generalizar de la siguiente forma: $\mathrm{GL}^k(n) = \{j^k_0(\phi) : \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \phi(0) = 0,\ \phi \text{ difeo. local.}\}$

Se puede mostrar que $\mathrm{GL}^k(n)$ es un grupo de Lie, esto por cuanto $\mathrm{GL}^k(n) = \prod_{i=1}^k S^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. En $\mathrm{GL}^k(n)$ definimos el producto

$$j^k_0(\phi) \cdot j^k_0(\psi) = j^k_0(\phi \circ \psi).$$

De la identificación anterior, podemos ver que el producto se traduce , por ejemplo para el caso $k = 2$, en

$$(A, B)(A_1, B_1) = (AA_1, AB_1 + B(A_1, A_1)),$$

y el inverso de cada elemento es $(A, B)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}B(A^{-1}, A^{-1}))$.

Definición 8 *Definamos* $\mathfrak{gl}^{(k)}(n) = \{j_0^k(X) : X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), X_0 = 0\}$.

Si definimos el corchete

$$[j_0^k(X), j_0^k(Y)] = -j_0^k([X, Y]),$$

entonces $\mathfrak{gl}^k(n)$ es un álgebra de Lie. Hay que notar que el corchete anterior sólo depende de $j_0^k(X)$ y $j_0^k(Y)$, esto sigue después de realizar un cálculo en coordenadas.

Podemos identificar a $\mathfrak{gl}^{(k)}(n)$ con el siguiente conjunto

$$\{j_0^k(\phi) : \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ suave}, \phi(0) = 0\}.$$

El siguiente mapeo, H_k, es una representación natural de $\mathrm{GL}^k(n)$, es decir que $H_k : \mathrm{GL}^k(n) \to Gl(\mathfrak{gl}^{(k-1)}(n))$, donde $H_k(j_0^k(\phi)) : \mathfrak{gl}^{(k-1)}(n) \to \mathfrak{gl}^{(k-1)}(n)$ es la transformación lineal definida por

$$H_k(j_0^k(\phi))(j_0^{k-1}(X)) = j_0^{k-1}(d\phi(X)).$$

Esta transformación no depende del representante en $j_0^k(\phi)$, esto es una consecuencia de la definición de $d\phi(X)_x$. Además, $H_k(j_0^k(\phi))^{-1} = H_k(j_0^k(\phi^{-1}))$, esto sigue del simple cálculo

$$\begin{aligned} H_k(j_0^k(\phi)) \circ H_k(j_0^k(\phi^{-1}))(j_0^{k-1}(X)) =& H_k(j_0^k(\phi))(j_0^{k-1}(d\phi(X))) \\ =& j_0^{k-1}(d\phi^{-1}(d\phi(X))) \\ =& j_0^{k-1}(X). \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena se puede concluir que H_k es un homomorfismo. En efecto,

$$\begin{aligned} H_k(j_0^k(\phi) \cdot j_0^k(\psi))(j_0^{k-1}(X)) =& H_k(j_0^k(\phi \circ \psi))(j_0^{k-1}(X)) \\ =& j_0^{k-1}(d(\phi \circ \psi)(X)) \\ =& j_0^{k-1}(d\phi(d\psi X)) \\ =& H_k(j_0^k(\phi)) H_k(j_0^k(\psi))(j_0^{k-1}(X)). \end{aligned}$$

Al ser H_k polinomial se concluye que es suave. Además H_k es inyectivo, pero en general H_k no es sobreyectivo, ya que por ejemplo,

$$\dim GL^{(2)}(n) = \dim \mathrm{GL}(n) + \dim S^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = n^2 + \frac{n^2(n+1)}{2},$$

pero por otro lado

$$\dim Gl(\mathfrak{gl}^{(2)}(n)) = (n+n^2)^2.$$

También tenemos la representación $h_k : \mathfrak{gl}^{(k)}(n) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}^{(k-1)}(n))$ dada por

$$h_k(j_0^k(X))(j_0^{k-1}(Y)) = -j_0^{k-1}([X,Y]).$$

Se puede probar que h_k es un homorfismo de álgebras de Lie. En efecto, por un lado se tiene que

$$\begin{aligned} h_k([j_0^k(X), j_0^k(Y)])(j_0^{k-1}(Z)) =& h_k(-j_o^k([X,Y]))j_0^{k-1}(Z) \\ =& j_0^{k-1}([[X,Y],Z]), \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} [h_k(j_0^k(X)), h_k(j_0^k(Y))](j_0^{k-1}(Z)) =& (h_k(j_0^k(X))h_k(j_0^k(Y)) \\ &- h_k(j_0^k(Y))h_k(j_0^k(X)))(j_0^{k-1}(Z) \\ =& j_0^{k-1}([X,[Y,Z]]) - j_0^{k-1}([Y,[X,Z]]), \end{aligned}$$

y el resultado sigue de la igualdad de Jacobi.

Igual que antes se tiene que h_k es inyectiva. De todo esto podemos concluir que $\mathfrak{gl}^{(k)}(n)$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}^{(k-1)}(n))$.

Proposición 7 *El álgebra de Lie de $GL^k(n)$ es $\mathfrak{gl}^{(k)}(n)$.*

Prueba. Sea $j_0^k(X) \in \mathfrak{gl}^{(k)}(n)$ de tal forma que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ con $X_0 = 0$. Consideremos ϕ_t el flujo local de X. En primer lugar vamos a probar que el dominio de ϕ_t contiene a 0 para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto, como $X_0 = 0$ la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por $\gamma(t) = 0$, es claramente una curva integral, es decir, $X_{\gamma(t)} = \gamma'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el dominio de ϕ_t contiene a $\mathbb{R} \times \{0\}$. Luego para todo $t \in \mathbb{R}$, $(t,0)$ está en el dominio de ϕ, y esto implica que existe U vecindario de 0 en $\mathbb{R}^n$ tal que $\{t\} \times U \subset$ dominio de ϕ. De lo anterior se deduce que $j_0^k(\phi_t) \in Gl^{(k)}(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Es fácil probar que $\beta : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{gl}^{(k-1)}(n))$ dado por $\beta(t) = H_k(j_0^k(\phi_t))$, es un grupo uniparamétrico. Esto se sigue de la regla de la cadena.

Afirmamos que $\beta'(0) = h_k(j_0^k(X))$. Para ver esto usamos un hecho muy conocido:

$$-[X,Z] = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, d\phi_t(Z).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x^i}|_0[X,Z] =&\frac{\partial}{\partial x^i}|_0\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\; d\phi_t(Z)\\ =&\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\;\frac{\partial}{\partial x^i}|_0 d\phi_t(Z),\end{aligned}$$

además

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}|_0[X,Z] = \frac{d}{dt}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}|_0 d\phi_t(Z),$$

y en general

$$-j_0^k([X,Z]) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(j^{k-1}(d\phi_t(Z))),$$

y de esto sigue que

$$h_k(j_0^k(X))j_0^{k-1}(Z) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\beta(t)j_0^{k-1}(Z).$$

Por lo tanto, $\beta^{'}(0) = h_k(j_0^k(X)))$.

Esto prueba que

$$\begin{aligned}h_k(\mathfrak{gl}^{(k)}(n)) \subset&\{v \text{ velocidad en 0 de un grupo uniparamétrico en } H_k(\mathrm{GL}^{(k)}(n))\}\\ \subset& Lie(H_k(\mathrm{GL}^{(k)}(n))).\end{aligned}$$

Como poseen la misma dimensión se sigue que

$$h_k(\mathfrak{gl}^{(k)}(n)) = Lie(H_k(\mathrm{GL}^{(k)}(n))).$$

Si pensamos en H_k y en h_k como representaciones canónicas, entonces concluimos que $\mathfrak{gl}^{(k)}(n) = Lie(\mathrm{GL}^{(k)}(n))$. ■

Definición 9 *Sea M variedad suave. Definimos el haz de marcos de orden superior como el siguiente conjunto*

$$L^{(k)}(M) = \{j_0^k(\phi)/\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to M, \textit{difeo. local con } 0 \in U\}.$$

Lema 3 *Si M es variedad suave, entonces $L^{(k)}(M)$ es variedad.*

Prueba. Sea $U \subset M$ abierto que admite un difeormorfismo $\phi : U \to \mathbb{R}^n$. Entonces si definimos $\pi : L^{(k)}(M) \to M$ por $\pi(j_0^k(\phi)) = \phi(0)$, se tendría que

$$\pi^{-1}(U) = \{j_0^k(\phi) \in L^{(k)}(M) : \phi(0) \in U\}.$$

Definamos $\widetilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{GL}^{(k)}(n)$ por $\widetilde{\phi}(j_0^k(\psi)) = (\psi(0), j_0^k(\phi \circ \psi - \phi(\psi(0)))$.

La topología en $L^{(k)}(M)$ se define de modo que los $\pi^{-1}(U)$ son abiertos y los $\widetilde{\phi}$ son difeomorfismos. Además, declaramos a los $\widetilde{\phi}$ como cartas. Si $\widetilde{\phi_1}$ y $\widetilde{\phi_2}$ son tales mapeos, el cambio de coordenadas es de la forma:

$$(p, j_0^k(\psi)) \mapsto (p, j_0^k(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) j_0^k(\psi)). \quad \blacksquare$$

Podemos hacer actuar al grupo $\mathrm{GL}^{(k)}(n)$ sobre $L^{(k)}(M)$ de la siguiente forma:

$$(j_0^k(\phi), j_0^k(\psi)) \in L^{(k)}(M) \times \mathrm{GL}^{(k)}(n) \mapsto j_0^k(\phi \circ \psi) \in L^{(k)}(M).$$

Esta acción es libre, como se puede comprobar. La prueba del siguiente lema es canónica y se puede efectuar sin ningún inconveniente.

Lema 4 *Si M es variedad suave, entonces $L^{(k)}(M)(M, GL^{(k)}(n), \pi)$ es un haz fibrado principal.*

4 Estructuras geométricas de orden superior

Sea Q un $\mathrm{GL}^{(k)}(n)$-espacio suave, es decir que $\mathrm{GL}^{(k)}(n)$ actúa a la izquierda, de manera suave, de Q. Si M es una variedad suave, denotaremos por $Q^k(M)$ al haz asociado a $L^{(k)}(M)$ con fibra estándar Q. Recordemos que

$$Q^k(M) = L^{(k)}(M) \times_{\mathrm{GL}^{(k)}(n)} Q.$$

Definición 10 *Una estructura geométrica de orden k y tipo Q sobre M es una sección suave de $Q^k(M)$.*

La definición anterior significa que existe $\lambda : M \to Q^k(M)$ tal que $\pi \circ \lambda = I_M$. Una forma alternativa de expresar una estructura geométrica es utilizando un mapeo $\sigma : L^{(k)}(M) \to Q$ que sea $Gl^{(k)}(n)$-equivariante.

Definición 11 *Sea $\sigma : L^{(k)}(M) \to Q$ una estructura geométrica de tipo Q y de orden k sobre la variedad M. Un difeomorfismo $\phi : M \to M$ se dice automorfismo de σ si se cumple al relación:*

$$\sigma \circ \phi_{(k)} = \sigma,$$

donde el mapeo $\phi_{(k)} : L^{(k)}(M) \to L^{(k)}(M)$ viene definido por

$$\phi_{(k)}(j_0^k(f)) = j_0^k(\phi \circ f).$$

Lema 5 *Sea $\sigma : L^{(k)}(M) \to Q$ una estructura geométrica de tipo Q y de orden k. Sean $\phi, \psi : M \to M$ difeomorfismos de M. Entonces $(\phi\circ\psi)_{(k)} = \phi_{(k)}\circ\psi_{(k)}$.*

Prueba. La prueba es casi inmediata y sigue del cálculo

$$\begin{aligned}(\phi \circ \psi)_{(k)}(j_0^k(f)) =& j_0^k(\phi \circ \psi \circ f)\\ =&\phi_{(k)}(j_0^k(\psi \circ f))\\ =&\left(\phi_{(k)} \circ \psi_{(k)}\right)(j_0^k(f)). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

El mapeo $\phi_{(k)}$, dado en la definición anterior, induce un difeomorfismo de haces fibrados $\overline{\phi} : Q^k(M) \to Q^k(M)$ definido por

$$\overline{\phi}([j_0^k(f), \xi]) = [\phi_{(k)}(j_0^k(f)), \xi].$$

Proposición 8 *Sea $\sigma : L^{(k)}(M) \to Q$ una estructura geométrica de tipo Q y de orden k sobre la variedad M. Sea $\lambda : M \to Q^k(M)$ la sección asociada a σ. Consideremos $\phi : M \to M$ un difeomorfismo. Entonces*

$$\sigma \circ \phi_{(k)} = \sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \circ \phi = \overline{\phi} \circ \lambda.$$

Prueba.
Sea λ la sección asociada a σ. Para todo $j_0^k(f) \in L^{(k)}(M)$ existe un único $\sigma(j_0^k(f))$ tal que $\lambda(\pi(j_0^k(f))) = [j_0^k(f), \sigma(j_0^k(f))]$.
Sea $x = \pi(j_0^k(f)) \in M$, luego

$$\begin{aligned}\overline{\phi} \circ \lambda(x) =&\overline{\phi}[j_0^k(f), \sigma(j_0^k(f))]\\ =&[\phi_{(k)}(j_0^k(f), \sigma(j_0^k(f))].\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\lambda \circ \phi(x) =&\lambda(\pi(j_0^k(\phi \circ f)))\\ =&[j_0^k(\phi \circ f), \sigma(j_0^k(\phi \circ f))]\\ =&[j_0^k(\phi \circ f), \sigma \circ \phi_{(k)}(j_0^k(f))]\\ =&[\phi_{(k)}(j_0^k(f)), \sigma(j_0^k(f))].\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba ya que la otra dirección es análoga. $\blacksquare$

Definición 12 *Sea $\sigma : L^{(k)}(M) \to Q$ una estructura geométrica de tipo Q y de orden k sobre la variedad M, y $x \in M$. El jet $j_x^{k+r}(\phi)$, donde ϕ es un germen de difeomorfismos de M en x, se dice un automorfismo infinitesimal de orden r si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. $j^r_{\alpha_0}(\sigma \circ \phi_{(k)}) = j^r_{\alpha_0}(\sigma)$, *para algún* $\alpha_0 \in \pi^{-1}(x)$.
2. $j^r_x(\lambda \circ \phi) = j^r_x(\overline{\phi} \circ \lambda)$.

Definición 13 *Denotaremos por* $\mathrm{Aut}^{k+r}(\sigma, x, y)$ *al conjunto de automorfismos infinitesimales de orden* r *de* σ *que llevan* x *en* y. *Pondremos* $\mathrm{Aut}^{k+r}(\sigma, x)$ *cuando* $x = y$.

Lema 6 *La condición* $j^r_x(\lambda \circ \phi) = j^r_x(\overline{\phi} \circ \lambda)$ *se puede reescribir en la siguiente forma*

$$j^r_{\phi(x)}(\lambda) \circ j^r_x(\phi) = j^r_{\lambda(x)}(\overline{\phi}) \circ j^r_x(\lambda).$$

La prueba del lema anterior se realiza al introducir el siguiente formalismo:

Definición 14 *Sea* $J^r(Q^k(M))$ *el conjunto de* r*-jets de secciones de* $Q^k(M)$. *Dada* λ *sección de* $Q^k(M)$, *definimos la prolongación de orden* r *de* λ, *denotada por* λ^r, $\lambda^r : M \to J^r(Q^k(M))$ *por* $\lambda^r(x) = j^r_x(\lambda)$.

Dado $\phi : M \to M$ difeomorfismo, el mapeo $\overline{\phi} : Q^k(M) \to Q^k(M)$ induce un difeomorfismo $j^r(\overline{\phi}) : J^r(Q^k(M)) \to J^r(Q^k(M))$ definido por

$$j^r(\overline{\phi})(j^r_x(\lambda)) = j^r_x(\overline{\phi} \circ \lambda).$$

Entonces $j^r_x(\lambda \circ \phi) = j^r_x(\overline{\phi} \circ \lambda)$ si, y sólo si $\lambda^r(\phi(x)) = j^r_x(\overline{\phi} \circ \lambda)$, que es lo que se quería probar en el lema anterior.

Sea $\sigma : L^{(k)}(M) \to Q$ una estructura geométrica. La prolongación de orden r de σ es dada por

$$\sigma^r : j^{k+r}_0(\phi) \in L^{(k+r)} \to j^r_0(\sigma(j^k_0(\phi \circ \tau_\bullet))) \in J^r(\mathbb{R}^n, Q),$$

donde $\sigma(j^k_0(\phi \circ \tau_\bullet)) : \mathbb{R}^n \to Q$ viene dada por $\sigma(j^k_0(\phi \circ \tau_\bullet))(v) = \sigma(j^k_0(\phi \circ \tau_v))$.

Lema 7 *Sea* $\sigma : L^{(k)}(M) \to Q$ *una estructura geométrica. Entonces se tiene que* $\sigma^r : L^{(k+r)} \to J^r(\mathbb{R}^n, Q)$ *es también estructura geométrica.*

Prueba. Basta verificar que σ^r es $\mathrm{GL}^{(k+r)}(n)$-equivariante.

Más adelante veremos que la acción, izquierda, de $\mathrm{GL}^{(k+r)}(n)$ sobre $J^r(\mathbb{R}^n, Q)$ viene dada por $gq = a(g) \cdot (q \circ \pi^{k+r}_r(g^{-1}))$, donde a se define también posteriormente. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sigma^r(\alpha g) &= \sigma^r(j^{k+r}_0(\phi \circ f)) \\ &= j^r_0(\sigma(j^k_0(\phi \circ f \circ \tau_\bullet))). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
g^{-1}\sigma^r(\alpha) =& a(g^{-1})(\sigma^r(\alpha)\circ\pi_r^{k+r}(g))\\
=& j_0^r(f_k^{-1})(j_0^r(\sigma(j_0^k(\phi\circ\tau_\bullet)))\circ\pi_r^{k+r}(g))\\
=& j_0^r(f_k^{-1}\cdot(\sigma(j_0^k(\phi\circ\tau_\bullet)\circ f)))\\
=& j_0^r(\sigma(j_0^k(\phi\circ\tau_\bullet\circ\tau_{-\bullet}\circ f\circ\tau_{f^{-1}(\bullet)}))\circ f)\\
=& j_0^r(\sigma(j_0^k(\phi\circ f\circ\tau_\bullet))).
\end{aligned}
$$

Uniendo lo anterior se concluye que σ^r es una estructura geométrica de tipo $J^r(\mathbb{R}^n, Q)$ y grado $k+r$. ■

Teniendo en cuenta lo anterior se tiene la siguiente proposición, y luego de esto concluíremos que $\mathrm{Aut}^{k+r}(\sigma, x)$ es un grupo de Lie, y además cerrado.

Proposición 9 *Sea $\sigma : L^{(k)}(M) \to Q$ una estructura geométrica. Entonces para todo $x \in M$ y $\alpha \in L^{(k+r)}(M)$ en la fibra sobre x se cumple*

$$\mathrm{Aut}^{k+r}(\sigma, x) \cong \mathit{Stab}_{Gl^{(k+r)}(n)}(\sigma^r(\alpha)\ ).$$

Prueba. En primer lugar observemos que si $\alpha \in L^{(k+r)}(M)$, entonces se sigue que $\alpha^{-1}\circ g^{-1}\circ\alpha \in Gl^{(k+r)}(n)$, para cualquier $g = j_x^{k+r}(f)$, donde f es difeomorfismo local de M con $f(x) = x$. Note que también $\alpha^{-1}\circ g\circ\alpha \in Gl^{(k+r)}(n)$.

Usando la $Gl^{(k+r)}(n)$-equivariancia de la estructura geométrica σ^r se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\sigma^r(g\alpha) =& \sigma^r((\alpha\circ\alpha^{-1})\circ g\circ\alpha)\\
=& \sigma^r(\alpha(\alpha^{-1}\circ g\circ\alpha))\\
=& (\alpha^{-1}\circ g^{-1}\circ\alpha)\sigma^r(\alpha).
\end{aligned}
$$

Del cálculo anterior se tiene que

$$
\begin{aligned}
g\in\mathrm{Aut}^{k+r}(\sigma,x) \Leftrightarrow& \sigma^r(g\alpha) = \sigma^r(\alpha)\\
\Leftrightarrow& (\alpha^{-1}\circ g^{-1}\circ\alpha)\sigma^r(\alpha) = \sigma^r(\alpha)\\
\Leftrightarrow& \alpha^{-1}\circ g^{-1}\circ\alpha \in\ \mathrm{Stab}_{Gl^{(k+r)}(n)}(\sigma^r(\alpha)\ ).
\end{aligned}
$$

Sea $\alpha \in L^{(k+r)}(M)$ fijo. Si definimos $F : \mathrm{Aut}^{k+r}(\sigma, x) \to\ \mathrm{Stab}_{Gl^{(k+r)}(n)}(\sigma^r(\alpha)$ por $F(g) = \alpha^{-1}\circ g^{-1}\circ\alpha$, tenemos que por el cálculo anterior F está bien definida. Claramente F es un homomorfismo de grupos, ya que

$$\begin{aligned} F(g_1g_2) =& \alpha^{-1}\circ(g_1g_2)\circ\alpha\\ =& \alpha^{-1}\circ g_1\circ\alpha\circ\alpha^{-1}\circ g_2\circ\alpha\\ =& F(g_1)F(g_2). \quad\blacksquare \end{aligned}$$

5 Propiedades de $J^r(Q^k(M))$

Queremos estudiar las propiedades de $J^r(Q^k(M))$. Se puede mostrar, y remitimos al lector a ([7]), que $J^r(Q^k(M))$ es haz asociado, con fibra $J^r(\mathbb{R}^n, Q)$, de un cierto haz fibrado principal: $W^r(L^{(k)}(M))$.

Este último conjunto se define

$$W^r(L^{(k)}(M)) = \{j^r_{(0,e)}(\lambda)/\lambda : \mathbb{R}^n \times \mathrm{GL}^{(k)}(n) \to L^{(k)}(M)\,\text{es triv. local}\}.$$

El grupo que actúa sobre el haz anterior es $\mathrm{GL}^{(r)}(n) \ltimes J^r_n(\mathrm{GL}^{(k)}(n)))$.

La acción izquierda del grupo $\mathrm{GL}^{(r)}(n) \ltimes J^r_n(\mathrm{GL}^{(k)}(n)))$ sobre la variedad $J^r(\mathbb{R}^n, Q)$ viene dada por

$$(j^r_0(\phi), j^r_0(f))\cdot j^r_0(\lambda) = j^r_0((f\lambda)\circ\phi^{-1}).$$

Se puede mostrar que $J^r(Q^k(M))$ es también haz asociado de $L^{(k+r)}(M)$, pero primero vamos a definir ciertos conceptos y probar algunos resultados.

Se prueba en [7] que $L^{(k+r)}(M) \hookrightarrow W^r(L^{(k)}(M))$ es una reducción. Tal mapeo inclusión es dada como sigue. Si $j^{k+r}_0(\phi) \in L^{(k+r)}(M)$, entonces ϕ induce un mapeo local $\phi_{(k)} : \mathbb{R}^n \times \mathrm{GL}^{(k)}(n) \to L^{(k)}(M)$, y la asignación buscada es $j^{(k+r)}_0(\phi) \to j^r_{(0,e)}(\phi_{(k)})$.

Sea $g = j^{k+r}_0(f) \in \mathrm{GL}^{(k+r)}(n)$ y definamos $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathrm{GL}^{(k)}(n)$ por medio de $f_k(x) = j^k_0(\tau_{-x}\circ f\circ\tau_{f^{-1}(x)})$, donde $\tau_x(y) = x + y$. Consideremos $a : \mathrm{GL}^{(k+r)}(n) \to J^r(\mathbb{R}^n, \mathrm{GL}^{(k)}(n))$ dada por $a(g) = j^r_0(f_k)$.

Lema 8 *Se cumple que* $(f\circ h)_k = f_k\circ h_k(f^{-1}(\cdot))$.

Prueba. La prueba es inmediata y sigue del cálculo

$$\begin{aligned} (f\circ h)_k(x) =& j^r_0(\tau_{-x}\circ(f\circ g)\circ\tau_{h^{-1}(f^{-1}(x))})\\ =& j^r_0(\tau_{-x}\circ f\circ\tau_{f^{-1}(x)}\circ\tau_{f^{-1}(x)}\circ h\circ\tau_{h^{-1}(f^{-1}(x))})\\ =& f_k\circ j^r_0(\tau_{f^{-1}(x)}\circ h\circ\tau_{h^{-1}(f^{-1}(x))})\\ =& f_k\circ h_k(f^{-1}(x)). \quad\blacksquare \end{aligned}$$

Del lema anterior se deduce el siguiente importante resultado.

Proposición 10 *Si $\pi_r^{k+r} : GL^{(k+r)}(n) \to GL^{(r)}(n)$ es la proyección natural, entonces el mapeo a satisface $a(g_1g_2) = a(g_1)\left(a(g_2) \circ \pi_r^{k+r}(g_1^{-1})\right)$, donde la variedad $J^r(\mathbb{R}^n, Gl^{(k)}(n))$ posee la estructura natural de grupo.*

Definición 15 *Si $\pi_k^{k-1} : GL^{(k-1)}(n) \to GL^{(r)}(n)$ es la proyección natural, entonces $N^k = ker(\pi_{k-1}^k)$.*

La inclusión $\mathrm{GL}^{(k+r)}(n) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{(r)}(n) \ltimes J_n^r(\mathrm{GL}^{(k)}(n)))$ se construye una vez que probemos el siguiente lema.

Lema 9 *El mapeo $(\pi_r^{k+r}, a) : GL^{(k+r)}(n) \to GL^{(r)}(n) \ltimes J_n^r(GL^{(k)}(n)))$ es un homomorfismo que envía N^{k+r} en $J_n^r(N^k)$, siempre que en $GL^{(r)}(n) \ltimes J_n^r(GL^{(k)}(n)))$ se tenga el producto $(g,h)(g_1,h_1) = (gg_1, h(h_1 \circ g^{-1}))$.*

Prueba. La parte que (π_r^{k+r}, a) es homomorfismo es trivial. En efecto, esto sigue del lema anterior y de la definición de producto semidirecto:

$$\begin{aligned}(\pi_r^{k+r}, a)(g_1g_2) =&(\pi_r^{k+r}(g_1g_2), a(g_1g_2))\\ =&(\pi_r^{k+r}(g_1)\pi_r^{k+r}(g_2), a(g_1)(a(g_2) \circ \pi_r^{k+r}(g_1^{-1})))\\ =&(\pi_r^{k+r}(g_1), a(g_1))(\pi_r^{k+r}(g_2), a(g_2)).\end{aligned}$$

Si tomamos

$$\phi(y) = y + \frac{1}{(k+r)!}L(y, \ldots, y)$$

donde L es $(k+r)$-multilineal y simétrica, entonces $\pi_r^{k+r}(j_0^{k+r}(\phi)) = e$. Ahora bien, dado $g \in N^{k+r}$, sabemos que $g = j_0^{k+r}(f)$, y por la condición de pertenecer al núcleo se puede probar que f debe tener la forma de la ϕ anterior. Luego se concluye que $\pi_r^{k+r}(g) = e$.

Por otro lado, se concluye que $a(g) = j_0^r(f)$, donde $f : \mathbb{R}^n \to N^k \subset \mathrm{GL}^{(k)}(n)$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} (I, 0, \ldots, 0, \frac{1}{r!}L_{x^{(r)}}) & \text{si } k \geq 2; \\ \\ \frac{1}{r!}L_{x^{(r)}} & \text{si } k = 1, \end{cases}$$

y $L_{x^{(r)}} : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la forma k-lineal dada por

$$L_{x^{(r)}}(y_1, \ldots, y_k) = L(y_1, \ldots, y_k, x, \ldots, x).$$

Se concluye que (π_r^{k+r}, a) es un homomorfismo tal que

$$(\pi_r^{k+r}, a)(N^{k+r}) \subset J_n^r(N^k). \quad \blacksquare$$

Lo anterior, básicamente, prueba que $L^{(k+r)}(M)$ es reducción de $W^r(L^{(k)}(M))$.

Agradecimientos

Se agradece al revisor por las útiles sugerencias que ayudaron a mejorar el presente trabajo. También se agradece el apoyo ofrecido por las Vicerrectorías de Investigación tanto del Instituto Tecnológico de Costa Rica como de la Universidad de Costa Rica.

Referencias

[1] Candel, A.; Quiroga-Barranco, R. (2004) "Rigid and finite type geometric structures", *Geometriae Dedicata* **106**: 123–143.

[2] D'Ambra, G.; Gromov, M. (1991) "Lectures in transformation groups: geometry and dynamics", *Surveys in Differential Geometry* **1**: 19–111.

[3] Duistermaat, J.J.; Kolk, J.A.C (2000) *Lie Groups*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin.

[4] Feres, R. (1998) *Dynamical Systems and Semisimple Groups. An Introduction*. Tracts in Mathematics 126, Cambridge University Press, New York.

[5] Gromov, M. (1988) *Rigid transformations groups*, in: D. Bernard & Y. Choquet-Bruhat (Eds.) *Géométrie Différentielle, Travaux en Cours*, Hermann, Paris: 65–139.

[6] Kobayashi, S.; Nomizu, K. (1980) *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, John Wiley & Sons, New York.

[7] Kolář, I.; Michor, P.W.; Slovák, J. (1993) *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin.

[8] Rosales, J. (2005) *The Gromov's Centralizer Theorem for Semisimple Lie group Actions*. Ph.D Thesis, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.