

UNA NOTA SOBRE OBJETOS K–FINITOS EN UN  
TOPOS BOOLEANO CON EL OBJETO DE LOS  
NÚMEROS NATURALES

A NOTE ON K–FINITE OBJECTS IN A BOOLEAN  
TOPOS WITH THE NATURAL NUMBERS OBJECT

OSVALDO ACUÑA ORTEGA\*

*Received: 2 Sep 2011; Revised: 7 Nov 2011; Accepted: 10 May 2012*

---

---

\*CIMPA & Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

### Resumen

Probamos que todo objeto k-finito en un topos booleano con el objeto de los números naturales es internamente el cociente de algún cardinal finito.

**Palabras clave:** Teoría de topos, objetos K-finitos, números naturales.

### Abstract

We prove that every k-finite object in a boolean topos with natural number object is internally the quotient of a natural number object.

**Keywords:** Topoi, K-finite objects, natural numbers.

**Mathematics Subject Classification:** 03G30, 18B25.

## 1 Introducción

Sea  $X \in |E|$ , con  $E$  un topos elemental con el objeto de los números naturales  $1 \xrightarrow{o} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$ , entonces

$$M(X) = \{R \in \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} / R \text{ es funcional} \wedge \exists_{n \in \mathbb{N}} (\text{dom} R[n])\} \xrightarrow{i_X} \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X}$$

donde  $i_X$  es la inclusión que define a  $M(X)$  y la  $\models [n] = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / a + b + 1 = n\}$ , “ $R$  es funcional” se debe entender por:

$$\forall x, y, y' (R(x, y) = R(x, y') \Rightarrow y = y').$$

Sigue inmediatamente de la definición de  $M(X)$  que la fecha

$$\text{dom} \circ i_X : M(X) \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}},$$

donde  $\text{dom}$  es la fecha dominio, se factoriza a través de  $[-] : \mathbb{N} \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  y por lo tanto existe una única fecha  $l : M(X) \longrightarrow \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{i_X} & \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} \\ l \downarrow & & \downarrow \text{dom} \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{[-]} & \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} \end{array}$$

commuta.

Definimos  $*$  :  $M(X) \times M(X) \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X}$  como:  $\models R_1 * R_2 = \{(a, b, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X / \exists_{k_1 \in \mathbb{N}} ((a, k_1, x) \in R_1 \vee (k_1, b, x) \in R_2) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2)\}$ .

## 2 Resultados

**Proposición 1** Si  $R_1, R_2$  son variables de tipo  $M(X)$  entonces

$$i) \models \text{dom}(R_1 * R_2) = [l(R_1) + l(R_2)] \text{ y}$$

$$ii) \models R_1 * R_2 \text{ es funcional.}$$

En particular  $*$  se factoriza a través de  $M(X)$ .

PRUEBA:  $i) \models (a, b) \in \text{dom}(R_1 * R_2) \Rightarrow a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) \Rightarrow (a, b) \in [l(R_1) + l(R_2)]$ . Por lo tanto  $\models \text{dom}(R_1 * R_2) \subseteq [l(R_1) + l(R_2)]$ .

Tenemos también que:

$$\begin{aligned} & \models (a, b) \in [l(R_1) + l(R_2)] \\ & \Rightarrow \exists_{k_1}(1 + a + k_1 = l(R_1) \wedge l(R_2) + k_1 = b) \vee \exists_{k_2}(1 + k_2 + b = l(R_2) \wedge a = k_2 + l(R_1)) \\ & \Rightarrow \exists_{k_1}((a, k_1) \in \text{dom}(R_1) \wedge l(R_2) + k_1 = b) \vee \exists_{k_2}((k_2, b) \in \text{dom}(R_2) \wedge a = k_2 + l(R_1)) \\ & \Rightarrow \exists_x \exists_{k_1}((a, k_1, x) \in R_1 \wedge l(R_2) + k_1 = b) \vee \exists_X \exists_{k_2}((k_2, b, x) \in R_2 \wedge l(R_1) + k_2 = a) \\ & \Rightarrow \exists_x \exists_{k_1}(((a, k_1, x) \in R_1 \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2)) \vee ((k_1, b, x) \in R_2 \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2))) \\ & \Rightarrow \exists_x \exists_{k_1}((a, k_1, x) \in R_1 \vee (k_1, b, x) \in R_2) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) \\ & \Rightarrow \exists_x(a, b, x) \in R_1 * R_2 \\ & \Rightarrow (a, b) \in \text{dom}(R_1 * R_2). \end{aligned}$$

Entonces  $\models [l(R_1) + l(R_2)] \subseteq \text{dom}(R_1 * R_2)$  y por extensionalidad se tiene que  $\models \text{dom}(R_1 * R_2) = [l(R_1) + l(R_2)]$ .

$$\begin{aligned} & (ii) \models (a, b, x) \in R_1 * R_2 \wedge (a, b, y) \in R_1 * R_2 \\ & \Rightarrow \exists_{k_1}((a, k_1, x) \in R_1 \vee (k_1, b, x) \in R_2) \wedge \exists_{k_2}((a, k_2, y) \in R_1 \vee (k_2, b, y) \in R_2) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) \\ & \Rightarrow \exists_{k_1} \exists_{k_2}(((a, k_1, x) \in R_1 \vee (k_1, b, x) \in R_2) \wedge ((a, k_2, y) \in R_1 \vee (k_2, b, y) \in R_2)) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) \\ & \Rightarrow \exists_{k_1} \exists_{k_2}(((a, k_1, x) \in R_1 \wedge (a, k_2, y) \in R_1 \vee ((a, k_1, x) \in R_1 \wedge (k_2, b, y) \in R_2) \vee ((k_1, b, x) \in R_2 \wedge (a, k_2, y) \in R_1) \\ & \vee ((k_1, b, x) \in R_2 \wedge (k_2, b, x) \in R_2)) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) \\ & \Rightarrow \exists_{k_1} \exists_{k_2}((k_1 = k_2 \wedge (a, k_1, x) \in R_1 \wedge (a, k_2, y) \in R_1) \vee \text{falso} \vee \text{falso} \vee (k_1 = k_2 \wedge (k_1, b, x) \in R_2 \wedge (k_2, b, x) \in R_2)) \\ & \Rightarrow x = y \vee x = y \\ & \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\models (a, b, x) \in R_1 * R_2 \wedge (a, b, y) \in R_1 * R_2 \Rightarrow x = y$ , y entonces se tiene que  $\models R_1 * R_2$  es funcional. Hemos visto que  $i_X \circ \text{dom} = l \circ [-]$ , internamente ésto nos dice que  $\models_{M(X)} \text{dom}(R) = [l(R)]$ . Por (i), (ii) tenemos que  $*$  :  $M(X) \times M(X) \rightarrow M(X)$ .

Como  $\models \text{dom}(R_1 * R_2) = [l(R_1) + l(R_2)]$  y  $\models \text{dom}(R_1 * R_2) = [l(R_1 * R_2)]$  tenemos que  $\models [l(R_1 * R_2)] = [l(R_1) + l(R_2)]$  y entonces como  $[-]$  es inyectiva se tiene que  $\models l(R_1 * R_2) = l(R_1) + l(R_2)$ .

Para cada  $X \in |E|$  denote por  $\phi_X$  la fecha única  $\phi \rightarrow X$ . Como  $\phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} = (\phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}, \phi_X)$  entonces  $\phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X}$  es una relación funcional y entonces  $\ulcorner \phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} \urcorner$  se factoriza a través del subconjunto de relaciones funcionales en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X$ . Por otro lado  $o \circ [-] = \ulcorner \phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \urcorner$ , pero claramente tenemos que

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\ulcorner \phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} \urcorner} & \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} \\ id_1 \downarrow & & \downarrow \exists_{pr_1} \\ 1 & \xrightarrow{\ulcorner \phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \urcorner} & \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \end{array}$$

conmuta, es decir  $\text{dom} \circ \ulcorner \phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} \urcorner = \ulcorner \phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \urcorner$  y entonces tenemos que  $\ulcorner \phi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X}$  se factoriza a través de  $M(X)$ . Denote esta factorización por  $\phi^X : 1 \rightarrow M(X)$ . ■

**Proposición 2**  $(M(X), *, \phi^X)$  es un objeto monoide con identidad.

PRUEBA: Probaremos que  $*$  es asociativo. A lo largo de esta prueba aparecen implicaciones no triviales que denotaremos por  $\otimes$  y  $\otimes \otimes$  cuyas justificaciones aparecerán más adelante en la prueba.

Sean  $R_1, R_2, R_3$  variables del tipo  $M(X)$ . Por definición de  $*$  tenemos que:

$$\begin{aligned} & \models (a, b, x) \in (R_1 * R_2) * R_3 \\ & \Leftrightarrow \exists_{k_1} ((a, k_1, x) \in R_1 * R_2 \vee (k_1, b, x) \in R_3) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3) \\ & \Leftrightarrow \exists_{k_1} (\exists_{k_2} (((a, k_2, x) \in R_1 \vee (k_2, k_1, x) \in R_2) \wedge a + k_1 + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3)) \\ & \quad \wedge (k_1, b, x) \in R_3) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3)) \\ & \text{como } \models \exists_{k_2} (k_2 = k_1 + l(R_2)) \\ & \Leftrightarrow \exists_{k_1} (\exists_{k_2} (((a, k_2, x) \in R_1 \vee (k_2, k_1, x) \in R_2) \wedge a + k_1 + 1 = l(R_1) + l(R_2)) \\ & \quad \vee \exists_{k_2} ((k_1, b, x) \in R_3 \wedge k_2 = k_1 + l(R_2))) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3)) \\ & \Rightarrow \exists_{k_1} \exists_{k_2} ((a, k_2, x) \in R_1 \vee ((k_2, k_1, x) \in R_2 \wedge a + k_1 + 1 = l(R_1) + l(R_2)) \vee \\ & \quad ((k_1, b, x) \in R_3 \wedge k_2 = k_1 + l(R_2))) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3)) \\ & \stackrel{\otimes}{\Rightarrow} \exists_{k_2} ((a, k_2, x) \in R_1 \vee (\exists_{k_1} (((k_2, k_1, x) \in R_2 \wedge b + k_2 + 1 = l(R_2) + l(R_3)) \vee \\ & \quad ((k_1, b, x) \in R_3 \wedge b + k_2 + 1 = l(R_2) + l(R_3))) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3)) \\ & \Rightarrow \exists_{k_2} ((a, k_2, x) \in R_1 \vee (k_1, b, x) \in R_2 * R_3) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2 * R_3) \\ & \Rightarrow (a, b, x) \in R_1 * (R_2 * R_3). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\models (a, b, x) \in (R_1 * R_2) * R_3 \Rightarrow (a, b, x) \in R_1 * (R_2 * R_3)$ .

Probemos ahora la otra implicación:

$$\begin{aligned} & \models (a, b, x) \in R_1 * (R_2 * R_3) \\ & \Leftrightarrow \exists_{k_1} ((a, k_1, x) \in R_1 \vee (k_1, b, x) \in R_2 * R_3) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3) \\ & \Leftrightarrow \exists_{k_1} ((a, k_1, x) \in R_1 \vee \exists_{k_2} ((k_1, k_2, x) \in R_2 \vee (k_2, b, x) \in R_3) \wedge b + k_1 + 1 = \\ & \quad l(R_2) + l(R_3)) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3) \end{aligned}$$

como  $\exists_{k_2}(k_2 = k_1 + l(R_2))$   
 $\Rightarrow \exists_{k_1}((\exists_{k_2}(a, k_1, x) \in R_1 \wedge k_2 = k_1 + l(R_2)) \vee \exists_{k_2}((k_1, k_2, x) \in R_2 \wedge b + k_1 + 1 = l(R_1) + l(R_2)) \vee (k_2, b, x) \in R_3)$   
 $\wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3) \stackrel{\otimes \otimes}{\Rightarrow} \exists_{k_2} \exists_{k_1}(((a, k_1, x) \in R_1 \wedge a + k_2 + 1 = l(R_1) + l(R_2)) \vee ((k_1, k_2, x) \in R_2 \wedge a + k_2 + 1 = l(R_1) + l(R_2)) \vee (k_2, b, x) \in R_3 \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3))$   
 $\Rightarrow \exists_{k_2}((a, k_2, x) \in R_1 * R_2 \vee (k_2, b, x) \in R_3) \wedge a + b + 1 = l(R_1 * R_2) + l(R_3)$ .  
 Por lo tanto  $\models (a, b, x) \in R_1 * (R_2 * R_3) \Rightarrow (a, b, x) \in (R_1 * R_2) * R_3$  y entonces  $\models R_1 * (R_2 * R_3) = (R_1 * R_2) * R_3$ .

Tenemos que  $\otimes$  es la conjunción de:

$$\models a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3) \wedge a + k_1 + 1 = l(R_1) + l(R_2) \wedge (k_1, k_2, x) \in R_2$$

$$\Rightarrow b + k_2 + 1 = l(R_2) + l(R_3) \wedge (k_1, k_2, x) \in R_2$$

y

$$\models (a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3) \wedge k_2 = k_1 + l(R_2) \wedge (k_1, b, x) \in R_2) \Rightarrow (b + k_2 + 1 = l(R_2) + l(R_3) \wedge (k_1, b, x) \in R_3).$$

También tenemos que  $\otimes \otimes$  es la conjugación de:

$$\models (a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3) \wedge b + k_1 + 1 = l(R_2) + l(R_3) \wedge (k_1, k_2, x) \in R_2) \Rightarrow (a + k_2 + 1 = l(R_1) + l(R_2) \wedge (k_1, k_2, x) \in R_2)$$

$$\text{y } \models (a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2) + l(R_3) \wedge k_2 = k_1 + l(R_2) \wedge (a, k_1, x) \in R_1) \Rightarrow (a + k_1 + 1 = l(R_1) + l(R_2) \wedge (a, k_1, x) \in R_1).$$

Ambas  $\otimes$  y  $\otimes \otimes$  tienen pruebas triviales.

Finalmente probemos que  $\models R_1 * \phi^X = \phi^X * R_1 = R_1$  :

$$\models (a, b, x) \in R_1 * \phi^X \Leftrightarrow \exists_{k_1}((a, k_1, x) \in R_1 \vee (k_1, b, x) \in \phi^X) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(\phi^X)$$

$$(\text{como } \llbracket \exists_{k_1}(k_1, b, x) \in \phi^X \rrbracket = \phi \text{ y } l(\phi^X) = 0)$$

$$\Leftrightarrow \exists_{k_1}(a, k_1, x) \in R_1 \wedge l(R_1) = a + b + 1$$

$$\Leftrightarrow \exists_{k_1}(a, k_1, x) \in R_1 \wedge a + k_1 + 1 = a + b + 1$$

$$\Leftrightarrow \exists_{k_1}(a, k_1, x) \in R_1 \wedge k_1 = b$$

$$\Leftrightarrow (a, b, x) \in R_1.$$

Por lo tanto  $\models R_1 * \phi^X = R_1$ . Similarmente se prueba que  $\models \phi^X * R_1 = R_1$  y entonces  $\phi^X$  es el elemento neutro de  $M(X)$ . Entonces  $(M(X), *, \phi^X)$  es un monoide con identidad. ■

**Nota:** Observe que  $l : M(X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +)$  es un homomorfismo de monoide con identidad ya que  $\models l(R_1 * R_2) = l(R_1) + l(R_2)$  y  $l \circ \phi^X = 0$ . Como  $\models \forall_{R \in M(X)} R * \phi^X = R \Rightarrow \forall_{R \in M(X)} l(R) + l(\phi^X) = l(R)$   $l(\phi^X) = 0$  y siendo  $\models \forall_{R \in M(X)} R * \phi^X = R$  se tiene que  $\models l(\phi^X) = 0$ , es decir  $l \circ \phi^X = 0$ .

**Proposición 3** Para todo  $p : 1 \rightarrow \mathbb{N}$  tenemos que

$$\begin{array}{ccc} X^{[p]} & \longrightarrow & 1 \\ \subseteq \downarrow & & \downarrow p \\ M(X) & \xrightarrow{l} & \mathbb{N} \end{array}$$

es un producto fibrado.

PRUEBA: Tenemos que  $\models l^{-1}(p) = \{R \in \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} / R \text{ es funcional } \wedge \text{ dominio de } R \text{ es } \ulcorner [p] \urcorner\}$  entonces  $\models l^{-1}(p) = X^{[p]}$ . ■

**Nota:** Denote por  $\psi : M(X) \rightarrow \Omega^X$  el morfismo  $M(X) \subseteq \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} \xrightarrow{\exists_{pr_2}} \Omega^X$ , es claro que éste morfismo es un homomorfismo con identidad de  $(M(X), \vee, \phi^X)$  y  $(\Omega^X, \cup, \phi)$ , más aún la imagen de  $\psi$  es  $K(X)$ .

**Teorema 4** Si  $E$  es un topos elemental booleano con el axioma de infinitud. Entonces  $X$  es  $k$ -finito si y solo si  $q : 1 \rightarrow \mathbb{N}$  tal que epic  $(X^{[q]} \rightarrow 1$  es un epimorfismo.

PRUEBA:  $(\Leftarrow)$  Si epic  $(X^{[q]} \rightarrow 1$  es un epimorfismo esto implica que  $\models \exists_{R \in M(X)} \psi(R) = \ulcorner X \urcorner$ , pero esto dice que  $1 \xrightarrow{\ulcorner X \urcorner} \Omega^X$  se factoriza a través de  $k(X)$ , de donde que  $X$  es  $k$ -finito

$(\Rightarrow)$  Si  $X$  es  $k$ -finito, entonces  $\ulcorner X \urcorner$  se factoriza a través de  $k(X)$ , pero todo objeto  $k$ -finito es internamente el cociente de algún cardinal finito, es decir se tiene que

$\models \exists_{R \in M(X)} \psi(R) = \ulcorner X \urcorner$ . Considere el subobjeto  $A$  definido por:

$$A = \{n \in \mathbb{N} / \exists_{R \in M(X)} \text{dom}R = [n] \wedge \psi(R) = \ulcorner X \urcorner\}.$$

Sabemos que  $\models \text{dom}R = [l(R)]$  de donde que

$$\models \exists_{R \in M(X)} \psi(R) = \ulcorner X \urcorner \wedge \text{dom}(R) = [l(R)].$$

Por otro lado

$$\models \exists_{R \in M(X)} \psi(R) = \ulcorner X \urcorner \wedge \text{dom}R = [l(R)]$$

$$\Rightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{R \in M(X)} \psi(R) = \ulcorner X \urcorner \wedge \text{dom}R = [n]$$

$$\Rightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} n \in A.$$

En consecuencia  $\models \exists_{n \in \mathbb{N}} n \in A$ , entonces  $\ulcorner A \urcorner$  se factoriza a través de  $p^+\mathbb{N}$ , donde  $p^+\mathbb{N} = \{B \in \Omega^{\mathbb{N}} / \exists_{n \in \mathbb{N}} n \in B\}$ . Como  $E$  es booleano por (3) existe una fecha de elección  $\mu : p^+\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $q = \ulcorner A \urcorner \circ \mu : 1 \rightarrow \mathbb{N}$  se factoriza a través de  $A$ , lo que significa que

$\models \exists_{R \in M(X)} \text{dom}R = [q] \wedge \psi(R) = \ulcorner X \urcorner$  y por la proposición 3 tenemos que

$\models \exists_{R \in X^{[q]}} \psi(R) = \ulcorner X \urcorner$ , lo que es equivalente a

$$\llbracket \exists_{R \in X^{[q]}} \psi(R) = \ulcorner X \urcorner \rrbracket = 1.$$

Por otro lado  $\text{epic}(X^{[q]}) = \llbracket \text{codom}R = \ulcorner X \urcorner \rrbracket = \llbracket \psi(R) = \ulcorner X \urcorner \rrbracket$  y claramente

$$\begin{array}{ccc} \text{epic}(X^{[p]}) & \longrightarrow & X^{[q]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \llbracket \exists_{R \in X^{[q]}} \psi(R) = \ulcorner X \urcorner \rrbracket & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

commuta, donde que  $\text{epic}(X^{[p]}) \rightarrow 1$  es un epimorfismo. ■

## Referencias

- [1] Acuña-Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*, Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, CT.
- [2] Acuña-Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) “Finiteness and decidability I”, in: *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics 753, Springer-Verlag, New York: 80–100.
- [3] Sols, I.M. (1975) “Bon ordre dans des nombres naturels dans un topos booléan”, *C.R. Acad. Sc. Paris* **281**: 601–603.