Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2012 **19**(2) : 169–181
cimpa – ucr issn: 1409-2433

RELAJACIÓN LAGRANGEANA PARA EL PROBLEMA DE PARTICIONAMIENTO DE ÁREAS GEOGRÁFICAS

LAGRANGEAN RELAXATION FOR THE GEOGRAPHICAL PARTITIONING PROBLEM

Juan Antonio Díaz García*
María Beatríz Bernábe Loranca†
Dolores Edwiges Luna Reyes‡
Elías Olivares Benítez§ José Luis Martínez Flores¶

*Received: 23 Feb 2012; Revised: 15 May 2012;
Accepted: 16 May 2012*

---

*Departamento de Ingeniería Industrial y Mecánica, Universidad de las Américas, Puebla, México. E-Mail: `juana.diaz@udlap.mx`

†Facultad de ciencias de la Computación, Benemerita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. E-Mail: `beatriz.bernabe@gmail.com`

‡Misma dirección que/*Same address as*: J.A. Díaz. E-Mail: `dolorese.luna@udlap.mx`

§Centro Interdisciplinario de Posgrados e Investigación, Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla, Puebla, México. E-Mail: `elias.olivares@upaep.mx`

¶Misma dirección que/*Same address as*: E. Olivares. E-Mail: `joseluis.martinez01@upaep.mx`

Resumen

Entre las metodologías utilizadas en el particionamiento territorial, destacan los modelos de localización-asignación ("location-allocation") y los de particionamiento de conjuntos ("set partitioning"), que agrupan pequeñas áreas geográficas llamadas *unidades básicas* en un número dado de grupos geográficos más grandes, denominados *territorios*. El problema de particionamiento territorial se modela como un problema de la p-mediana. Se utiliza un enfoque de relajación Lagrangeana para obtener cotas inferiores de la solución óptima y un procedimiento para la obtención de cotas superiores. Para evaluar el desempeño de la metología propuesta, se utilizan instancias de dos ciudades de México. Los resultados obtenidos se comparan con otros métodos de particionamiento de la literatura. De acuerdo con los resultados obtenidos para estas instancias, utilizando distintos números de grupos, se observa que se pueden obtener soluciones factibles de muy buena calidad con un esfuerzo computacional razonable.

Palabras clave: particionamiento, relajación Lagrangena, heurísticas.

Abstract

Among methodologies used in territory clustering, stand location-allocation and set partitioning models, to group small geographic areas, usually called "basic units" into a given number of larger groups called "territories". The territory clustering problem is modeled as a p-median problem. A Lagrangean relaxation is used to obtain lower bounds to the optimal solution of the problem and a procedure is used to obtain upper bounds. In order to evaluate the performance of the proposed procedure, instances of two Mexico cities are used. The results obtained with the proposed method are compared to partitioning methods from the literature. According to the obtained results for the considered instances using different number of groups, optimal or near optimal solution are obtained with a reasonable amount of computer effort.

Keywords: partitioning, Lagrangean relaxation, heuristics.

Mathematics Subject Classification: 90C59, 62H30, 91C20.

Introducción

Los problemas de particionamiento territorial tienen aplicaciones en diversos ámbitos, tales como la identificación de distritos políticos, distritos escolares, instalaciones de servicios sociales, instalaciones de servicios de emergencia, territorios comerciales, etc. En diversos trabajos de la literatura, se utilizan criterios geográficos como medidas de adecuación de las soluciones. Los criterios comunmente utilizados son la compacidad y la contiguidad. De acuerdo con Kalcsics et al. [7], un territorio es geográficamente compacto si tiene forma aproximadamente redonda y no está distorsionado, pero no existe una definición rigurosa del concepto. En muchos trabajos de la literatura, se utiliza como medida de compacidad la suma de distancias entre las unidades básicas y el centroide al que están asignadas, modelando el problema como un problema de la p-mediana (ver por ejemplo Hess y Samuels [6] y Zoltners y Sinha [12]). El problema de la p-mediana ha sido ampliamente estudiado en la literatura. En Reese [10] se puede encontrar una excelente revisión de metodologías para resolver el problema de forma aproximada y exacta, entre los que destacan las metodologías heurísticas y metaheurísticas para obtener cotas primales, metodologías para la obtención de cotas inferiores basadas en relajaciones Lagrangeanas o relajaciones Lagrangeanas subrogadas. Recientemente, en Avella et al. [1] se propone un algoritmo "Branch-and-Cut-and-Price" que permite encontrar soluciones óptimas o cercanas a las soluciones óptimas para problemas de hasta 3,795 nodos. Asimismo, en Avella et al. [1] se menciona que el modelado de problemas de agrupamiento como problemas de la p-mediana motivan el estudio de instancias de gran escala. De acuerdo con experiencias computacionales previas, los autores mencionan que los problemas de p-mediana definidos en grafos $G = (V, A)$ con $|A| \geq 360,000$ son difíciles de resolver con software comercial especializado para problemas de Programación Entera Mixta (MIP por sus siglas en inglés).

En este trabajo se considera un problema de agrupación territorial y se formula como un problema de la p-mediana. El problema de la p-mediana es un problema "NP-hard" (ver Kariv y Hakimi [8]). A partir de dicha formulación se obtienen soluciones para diferentes instancias del problema usando el software de optimización FICO XPRESS. Debido a que para instancias de gran tamaño del problema no es factible la resolución a través de dicho software, se utiliza un esquema de relajación Lagrangeana que permite obtener cotas inferiores y superiores para instancias de mayor tamaño. La literatura acerca de la teoría y aplicaciones de la relajación Lagrangeana es muy extensa. En Guignard [5] se encuentra una excelente descripción de la metodología y aplicaciones.

Para evaluar el desempeño de la metodología propuesta en este trabajo, se resolvió el problema de agrupamiento para dos ciudades de México, una de mediano tamaño (la ciudad de Toluca, capital del Estado de México) y una de gran tamaño (la zona metropolitana del Distrito Federal). Para tal motivo se utilizaron la Unidades Geoestadísticas Básicas (AGEBS) del Marco Geoestadístico Nacional del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) de México. El Marco Geostadístico Nacional es un sistema que permite relacionar la información estadística con el espacio geográfico correspondiente, divide al territorio nacional en áreas de fácil identificación en campo y es adecuado para las actividades de captación de información. Los resultados obtenidos con la metodología propuesta se comparan con otros métodos conocidos de la literatura. En particular, la metodología propuesta se compara con los siguientes métodos de agrupamiento: el algoritmo exacto denominado Particionamiento Alrededor de los Medoides (PAM por sus siglas en inglés) propuesto por Kaufman y Rousseeuw en [9] e implementado en [2] por Bernábe et al., donde además se propone un algoritmo de recocido simulado y un heurístico de búsqueda en entorno variable (VNS por sus siglas en inglés). De acuerdo con la experiencia computacional se observa que la metodología propuesta proporciona soluciones óptimas o cercanas a la solución óptima con un esfuerzo computacional razonable.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 1 se presenta la formulación matemática del problema de la p-mediana. Posteriormente, en la sección 2, se presenta un esquema de relajación Lagrangeana donde las restricciones de asignación son relajadas y se penaliza su violación en la función objetivo. La sección 3 presenta la experiencia computacional. Finalmente, en la sección 4 se presentan algunas conclusiones y se mencionan extensiones futuras para el trabajo.

1 El problema de la p-mediana

El problema de la p-mediana considera la siguiente situación. Se requiere particionar un conjunto finito de objetos en exactamente p grupos. Cada uno de dichos grupos estará caracterizado por uno de los objetos, que es seleccionado como la *mediana* del grupo, y el subconjunto de objetos asignado a dicha mediana. Para cada par de objetos se especifica una distancia y se requiere minimizar la suma de distancias entre los objetos y las medianas a las que están asignados. Sea $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de objetos. Para cada par $(i, j), i \in N, j \in N$, d_{ij} denota la distancia (similitud) entre los objetos i y j. Dado el número p, que denota el número de grupos, se requiere particionar el conjunto N en p subconjuntos disjuntos, es decir, $N = \bigcup_{k=1}^{p} N_k$ y $N_r \cap N_s = \emptyset$, para todo $r, s \in \{1, \dots, p\}, r \neq s$. A continuación se considera el siguiente modelo de programación matemática para el problema. Se definen las siguiente variables de decisión:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{si el objeto } i \text{ es seleccionado como mediana,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el objeto } j \text{ se asigna a la mediana, } i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El problema se puede modelar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar } z = & \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} d_{ij}x_{ij} && && (1)\\
\text{sujeto a } \quad & \sum_{i\in N} x_{ij} = 1 && j \in N && (2)\\
& \sum_{i\in N} y_i = p && && (3)\\
& x_{ij} \leq y_i && i\in N, j\in N && (4)\\
& x_{ij} \in \{0,1\} && i\in N, j\in N && (5)\\
& y_i \in \{0,1\} && i \in N && (6)
\end{aligned}$$

Las restricciones (2) aseguran que cada objeto se asigna a una de las medianas. La restricción (3) asegura que se seleccionan p objetos como medianas. Finalmente, las restricciones (4)–(6) aseguran que los objetos solo puedan ser asignados a las medianas seleccionadas.

Como puede observarse, en el modelo anterior hay $n\,(n+1)$ variables de decisión y $n\,(n+1)+1$ restricciones. Aunque se pueden resolver instancias del problema de tamaño pequeño y moderado utilizando software especializado de programación matemática, para instancias de gran tamaño, como algunas de las consideradas en este trabajo, no es factible el uso de software de optimización debido al gran número de variables y restricciones del modelo. Instancias de mayor tamaño pueden ser abordadas utilizando diversas técnicas de programación matemática, tales como relajaciones Lagrangenas, algoritmos de generación de columnas, etc. En la siguiente sección se considera una relajación Lagrangeana que permite obtener cotas inferiores para la solución óptima del problema.

2 Relajación Lagrangeana

A continuación se muestra un esquema de relajación Lagrangena para el problema de la p-mediana. Para obtener cotas inferiores, se resuelve el dual Lagrangeano utilizando un algorimo de optimización subgradiente. Asimismo, en cada iteración del algoritmo de optimización subgradiente, se utiliza un procedimiento para obtener cotas superiores para el valor de la solución óptima, utilizando la información de la solución óptima de la relajación Lagrangeana obtenida en dicha iteración. Para un vector $\lambda \in \mathbb{R}^n$, dualizando las restricciones de asignación (2), se obtiene la siguiente relajación Lagrangeana:

$$\begin{aligned}
(LR(\lambda))\ \text{minimizar}\ z_{LR}(\lambda) = & \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}(d_{ij}-\lambda_j)x_{ij} + \sum_{j\in N}\lambda_j \\
\text{sujeto a} \quad & \sum_{i\in N} y_i = p \\
& x_{ij} \le y_i \qquad i,j\in N \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \quad i,j\in N \\
& y_i \in \{0,1\} \quad i\in N
\end{aligned}$$

Para un conjunto de multiplicadores λ dado, la solución óptima de $LR(\lambda)$ se obtiene de la siguiente manera. Para cada $i \in N$, sea:

$$\gamma_i = \sum_{j\in N} \min\{d_{ij}-\lambda_j, 0\}$$

Asimismo, sean $i_1, i_2 \ldots, i_n$, tales que $\gamma_{i_1} \le \gamma_{i_2} \le \ldots \le \gamma_{i_n}$. Entonces el valor de la solución óptima de $LR(\lambda)$ es $z_{LR}(\lambda) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_{i_k} + \sum_{j\in N}\lambda_j$, haciendo $y_{i_k} = 1$ para $k = i_1, i_2, \ldots, i_p$, $y_{i_k} = 0$ para $k = i_{p+1}, \ldots, i_{|N|}$, y

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } d_{ij}-\lambda_j < 0 \text{ y } y_i = 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El problema dual Lagrangiano es

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}^n} z_{LR(\lambda)}.$$

La función $z_{LR(\lambda)}$ es la envolvente inferior de una familia de funciones lineales de λ y por tanto es una función concava de λ con puntos de quiebre donde la función no es diferenciable (ver Guignard [5]) y se resuelve utilizando el algoritmo de optimización subgradiente.

Adicionalmente, en cada iteración del algoritmo de optimización subgradiente se utiliza un procedimiento para obtener una cota superior a partir de la información proporcionada por la solución óptima de la relajación Lagrangeana, $LR(\lambda)$, en dicha iteración. Dado un conjunto de p medianas, la solución óptima del subproblema de asignación se obtiene de la siguiente manera. Sean $I_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ las p medianas seleccionadas en la iteración k, entonces, para cada $j \in N$,

$$i_k^\star(j) = \arg\min_{i\in I_k}\{d_{ij}\}$$

donde $i_k^\star(j)$ denota la mediana seleccionada a la que es asignado el objeto j en la iteración k. Por tanto,

$$z_k^\star = \sum_{j\in J} d_{i_k^\star(j),j}$$

es el valor de la cota superior de la iteración k.

3 Resultados computacionales

Para evaluar el desempeño de la metodología propuesta en este trabajo para el problema de agrupamiento territorial se utilizan las Unidades Geoestadísticas Básicas (AGEBS) del Marco Geoestadístico Nacional del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) de México, correspondientes a las ciudades de Toluca y la zona metropolitana del Distrito Federal. La instancia correspondiente a la ciudad de Toluca contiene 469 AGEBS y la instancia correspondiente a la zona metropolitana del Distrito Federal contiene 5087 AGEBS. Para cada una de las instancias se utilizaron tres valores distintos para el número de grupos. En la Tabla 1 se muestran los distintos valores para el número de grupos considerados para cada una de las instancias de prueba. En Avella et al. [1] se menciona que la modelación de problemas de agrupamiento como problemas de la p-mediana ha motivado el estudio computacional para instancias del problema de gran escala. Una serie de experimentos computacionales preliminares realizados por estos autores indican que instancias del problema definidas en grafos $G = (V, A)$ con $|A| \geq 360,000$ son difíciles de resolver usando paquetes de software comerciales especializados para problemas de Programación Entera Mixta (MIP por sus siglas en inglés), tales como ILOG CPLEX o FICO XPRESS. Dicha dificultad estriba en que la cantidad de memoria requerida por dichos paquetes de software para resolver relajaciones lineales de instancias del problema de la p-mediana de gran escala es exorbitante. Esto ha provocado que se exploren enfoques alternativos al método simplex, basados ya sea en relajaciones Lagrangeanas o Generación de Columnas. Debido a que la relajación Lagrangeana considerada en este trabajo satisface la propiedad de integridad (ver Guignard [5]), la cota que se obtiene al resolver el dual Lagrangeano coincide con la cota de la relajación lineal. De experiencias computacionales realizadas por otros autores, se puede observar que la relajación lineal del problema de la p-mediana proporciona cotas inferiores ajustadas (ver por ejemplo Christofides y Beasley [3] y Avella et al. [1]). En estos trabajos se consideran instancias donde el problema de la p-mediana se define a través de un grafo y la matriz de distancias se genera aplicando el algoritmo de Floyd (ver Floyd [4]) para calcular las distancias mínimas entre cualquier par de nodos. Para aquellas instancias en las que se conoce la solución óptima del problema, el gap de dualidad relativo, definido como,

$$gap = \frac{z^{\star} - z_{LP}}{z_{LP}} \times 100$$

donde $z^{\star}$ denota la solución óptima del problema y z_{LP} denota la cota inferior correspondiente a la relajación lineal del problema, mide la calidad

Instancia	Descripción	AGEBS	Número de grupos
1	Toluca	469	24
2	Toluca	469	47
3	Toluca	469	94
4	Distrito Federal	5087	255
5	Distrito Federal	5087	508
6	Distrito Federal	5087	1018

Tabla 1: Instancias de prueba.

de las cotas inferiores obtenidas. Para estas instancias el valor promedio del gap de dualidad relativo es 0.17% y en ningún caso es mayor a 1.20%. Por otro lado, se generaron aleatoriamente un total de 420 instancias del problema (10 instancias del problema para cada valor n y p), considerando distancias euclídeas, para los siguientes valores de n (número de objetos): 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750. Para cada uno de los valores de n se consideran 3 valores distintos del parámetro p ($p = \lceil 0.1 \times n \rceil$, $p = \lceil 0.2 \times n \rceil$ y $p = \lceil 0.3 \times n \rceil$). En cada una de las instancias se generan puntos aleatorios en el cuadrado unitario y posteriormente se calcula la distancia entre todos los pares de puntos para generar la matriz de distancias. En este caso, en promedio, el gap de dualidad relativo es de 0.01% y en ningún caso es mayor a 0.19%. Debido al requerimiento de memoria ocasionado por el gran número de variables de decisión y restricciones del modelo de la p-mediana, no es posible resolver la instancia correspondiente a la zona metropolitana del Distrito Federal utilizando el software de optimización FICO XPRESS. Sin embargo, la cota inferior de la relajación lineal del problema de la p-mediana se puede aproximar usando el esquema de relajación Lagrangeana presentado en la sección 2, debido a que el problema Lagrangeano satisface la propiedad de integridad.

Los experimentos computacionales efectuados son:

- Evaluación de metodologías exactas para el problema. En particular, se compara el desempeño del software de optimización FICO XPRESS en la resolución del problema de la p-mediana con el desempeño del algoritmo PAM implementado en Bernábe et al. [2].

- Evaluación de metodologías de aproximación para el problema. En particular, se comparan la calidad de la soluciones obtenidas y el esfuerzo computacional requerido de las heuristicas propuestas en Bernábe et al. [2] y de la metodología propuesta en este trabajo.

El modelo de la p-mediana se resuelve con el software de optimización

Instancia	Número de grupos	Valor de la solución óptima	FICO XPRESS Cota inferior Relajación lineal	FICO XPRESS Tiempo CPU (segundos)	PAM Tiempo (segundos)
1	24	9.1986	9.1986	42.50	79.00
2	47	5.7338	5.7338	35.05	431.00
3	94	3.2089	3.2086	33.26	2188.00

Tabla 2: Resultados obtenidos con el algoritmo PAM y el software FICO-XPRESS.

FICO XPRESS y la relajación Lagrangeana es implementada en lenguaje C. Ambos procedimientos son ejecutados en una computadora HP elite book con procesador Intel Core 2 Duo, 2.35GHz y 2GB de memoria RAM. Asimismo, el algoritmo PAM, el algoritmo de temple simulado y el procedimiento de búsqueda en entorno variable son codificados en lenguaje Visual Basic y ejecutados en una computadora Acer con procesador Intel Atom 1.66Ghz con 2 GB de memoria RAM.

A continuación se describe la experimentación realizada. La solución exacta del problema usando el software de optimización FICO XPRESS solo se evalúa para las instancias correspondientes a la ciudad de Toluca, ya que la instancia del Distrito Federal excede los requerimientos de memoria. Asimismo, para el algoritmo PAM se reportan las soluciones óptimas para las instancias correspondientes a la ciudad de Toluca, ya que para la instancia del Distrito Federal no se termina la ejecución del algoritmo en un tiempo límite, especificado en 2 horas. En la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos con el algoritmo PAM y con el software de optimización FICO XPRESS para las instancias correspondientes a la ciudad de Toluca, mientras que en las Tablas 3, 4 y 5, se reportan los resultados obtenidos con el algoritmo de relajación Lagrangeana (LR), el algoritmo de temple simulado (SA, por sus siglas en inglés) y el algoritmo de búsqueda en entorno variable (VNS), respectivamente. Dichas tablas muestran las cotas superiores (soluciones factibles), las desviaciones porcentuales de estas cotas con respecto a la cota inferior obtenida con la relajación Lagrangeana, y los tiempos de CPU requeridos. Adicionalmente, la Tabla 3 también muestra las cotas inferiores obtenidas con la relajación Lagrangeana. Por otro lado, para evaluar la calidad de las cotas superiores obtenidas con las diversas metodologías, se utiliza el gap relativo que se calcula de la siguiente manera,

$$\text{gap relativo} = \frac{\overline{z} - z_{LD}}{z_{LD}} \times 100$$

donde $\overline{z}$ denota la mejor cota superior obtenida y z_{LD} es la cota inferior obtenida del problema dual Lagrangeano.

Instancia	Número de grupos	Relajación Lagrangeana (LR) Cota inferior	Cota superior	Gap relativo	Tiempo CPU (segundos)
1	24	9.1986	9.1846	0.00%	0.65
2	47	5.7338	5.7360	0.00%	5.07
3	94	3.2086	3.4318	7.04%	1.19
4	255	51.7595	53.2925	2.96%	902.07
5	508	34.0295	34.9129	2.59%	565.71
6	1018	21.1917	21.9224	3.45%	839.35

Tabla 3: Resultados obtenidos con la relajación Lagrangeana.

Instancia	Número de grupos	Temple simulado (SA) Cota superior	Gap relativo	Tiempo CPU (segundos)
1	24	11.8931	29.49%	9.00
2	47	8.3643	45.82%	15.00
3	94	5.1711	61.28%	21.00
4	255	72.4909	40.64%	191.00
5	508	51.9412	51.13%	554.00
6	1018	30.8261	45.46%	843.00

Tabla 4: Resultados obtenidos con el algoritmo de temple simulado (SA).

Instancia	Número de grupos	Búsqueda de entorno variable (VNS) Cota superior	Gap relativo	Tiempo CPU (segundos)
1	24	11.8356	28.86%	1.00
2	47	8.1927	42.83%	1.00
3	94	5.0223	56.64%	2.00
4	255	70.9344	37.05%	555.00
5	508	50.7464	49.12%	1240.00
6	1018	29.2477	38.01%	1337.00

Tabla 5: Resultados obtenidos con el algoritmo de búsqueda de entorno variable (VNS).

Como se puede observar en la Tabla 1 la relajación lineal del problema de la p-mediana proporciona cotas inferiores de la solución óptima del problema de agrupamiento de muy buena calidad. Aunque por restricciones de requerimiento de memoria no es posible resolver instancias de gran tamaño con el software, dichas cotas se pueden aproximar con el enfoque de relajación Lagrangeana propuesto en este trabajo.

De acuerdo a los resultados obtenidos, se observa que la relajación Lagrangeana proporciona cotas inferiores y cotas superiores de buena calidad. Con excepción de la instancia número 3, las desviaciones porcentuales de las cotas superiores con respecto a las cotas inferiores, no exceden al 3.5%. Para la instancia 3, la desviación es de 7.04%. Sin embargo, el procedimiento utilizado en este trabajo para obtener las cotas superiores, es muy simple, y por lo mismo es susceptible de mejora mediante la utilización de métodos heurísticos más elaborados. Por otro lado, se puede observar, que, con respecto a la calidad de las cotas superiores, el algoritmo de relajación Lagrangeana supera significativamente a los otros métodos heurísticos evaluados. Asimismo, los tiempos de CPU requeridos por el algoritmo de relajación Lagrangeana son razonables y en algunos casos se comparan favorablemente con los tiempos de CPU requeridos por los otros métodos heurísticos.

En la Figura 1 se muestran los territorios correspondientes a la instancia de la ciudad de Toluca con 24 grupos. Este mapa se obtuvo con la interfaz gráfica utilizada en Zamora [11]

4 Conclusiones

En este trabajo, el problema de Particionamiento de Áreas Geográficas se modela como un problema de la p-mediana y se propone una relajación Lagrangeana para obtener cotas inferiores de la solución óptima del problema. Asimismo, en cada iteración del algoritmo de optimización subgradiente se utiliza un procedimiento para obtener cotas superiores de la solución óptima. De acuerdo con la experimentación efectuada para evaluar el comportamiento del método propuesto, se puede observar que las cotas inferiores proporcionadas por la relajación Lagrangeana son de muy buena calidad. Asimismo, las cotas superiores obtenidas por el método propuesto se comparan favorablemente con otros métodos heurísticos de la literatura.

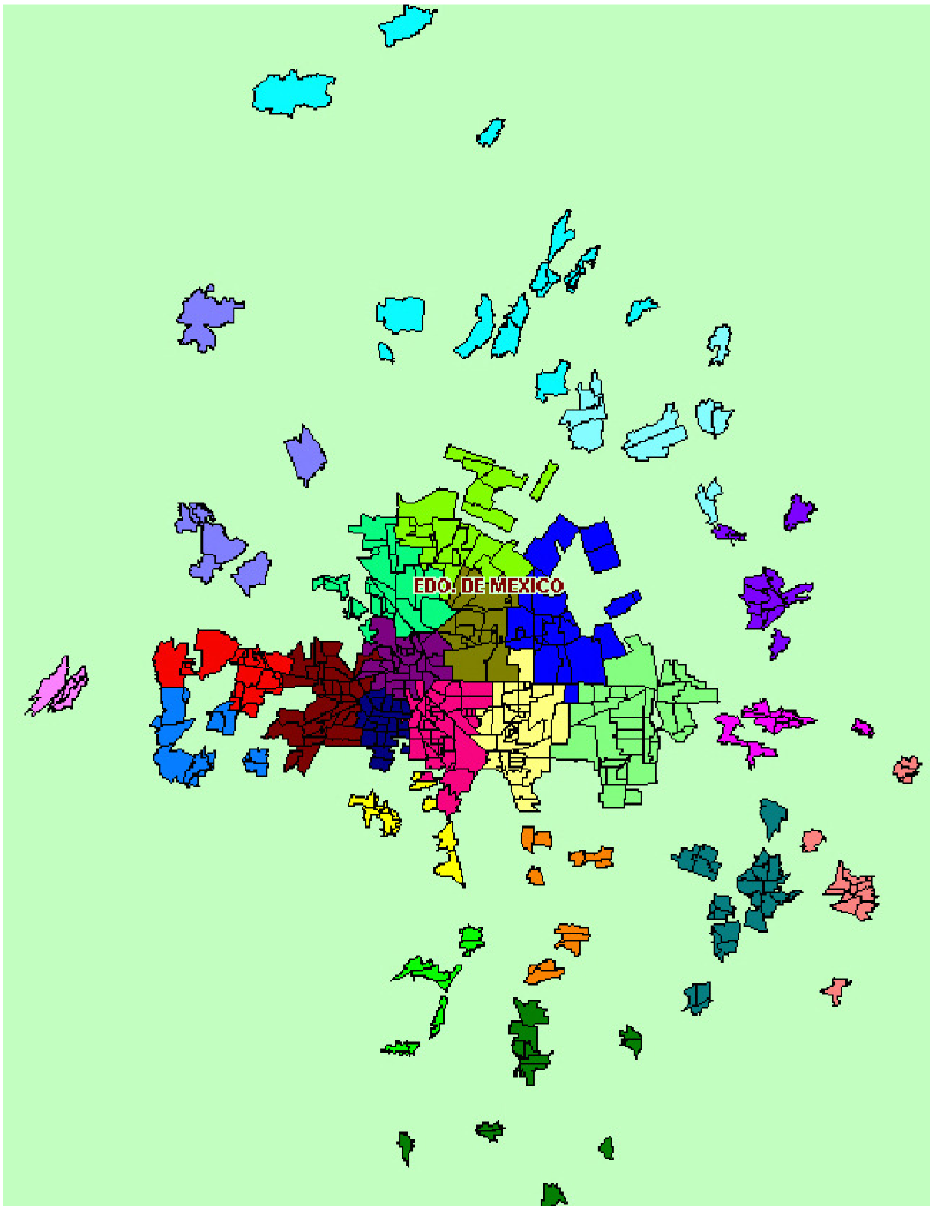

Figura 1: Mapa para la ciudad de Toluca.

Referencias

[1] Avella, P.; Sassanol, A.; Vasil'ev, I. (2007) 'Computational study of large-scale p-Median problems", *Mathematical Programming* **109**: 89–114.

[2] Bernábe, M.B.; Espinosa, J.E.; Ramírez, J.; Osorio, M.A. (2011) "A statistical comparative analysis of simulated annealing and variable neighborhood search for the geographic clustering problem", *Computación y Sistemas* **14**(3): 295–308.

[3] Christofides, N.; Beasley, J.E. (1982) "A tree search algorithm for the p-median problem", *European Journal of Operational Research* **10**: 196–204.

[4] Floyd, R.W. (1962) "Algorithm, 97 - shortest path", *Communications of the ACM* **5**: 345.

[5] Guignard, M. (2003) "Lagrangean Relaxation", *TOP* **11**(2): 151–228.

[6] Hess, S.W.; Samuels, S.A. (1971) "Experiences with a sales districting model: criteria and implementation", *Management Science* **18**(4): 41–54.

[7] Kalcsics, J.; Nikel, S.; Schröder, M. (2005) "Toward a unified territory design approach - applications, algorithms, and GIS integration", *TOP* **13**(1): 1–74.

[8] Kariv O.; Hakimi, S.L. (1979) "An algorithmic approach to network location problems. II: the p-medians". *SIAM Journal of Applied Mathematics* **37**(3): 539–560.

[9] Kaufman, L.; Rousseeuw, P.J. (2008) *Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis*, John Wiley Online.

[10] Reese, J. (2006) "Solution methods for the p-median problem: An annotated bibliography", *Nerworks* **48**(3): 125–142.

[11] Zamora, E. (2006) *Implementación de un Algoritmo Compacto y Homogéneo para la C lasificación de AGEBs bajo una Intefaz Gráfica.* Tesis de Ingeniería en Ciencias de la Computación, Benemerita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

[12] Zoltners, A.; Sinha, P. (2005) Sales territory design: thirty years of modeling and implementation. *Marketing Science* **24**(3): 313–331.