

ALGORITMO CONJUNTO KALMAN–HAAR
APLICADO
AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

JOINT KALMAN–HAAR ALGORITHM APPLIED
TO SIGNAL PROCESSING

ALEJANDRO VIEGENER* RICARDO O. SIRNE†
EDUARDO P. SERRANO‡ MARCELA FABIO§
CARLOS E. D’ATTELLIS¶

Received: 8-Feb-2010; Revised: 10-Nov-2011; Accepted: 30-Nov-2011

*Escuela Superior Técnica del Ejército “General Manuel N. Savio”, I.E.S.E., Argentina, E-Mail: a_viegner@yahoo.com.ar

†Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina, E-Mail: rsirne@fi.uba.ar

‡Centro de Matemática Aplicada, Universidad de San Martín y Escuela Superior Técnica del Ejército “General Manuel N. Savio”, I.E.S.E., Argentina, E-Mail: eserrano@unsam.edu.ar

§Misma dirección que/Same address as E.P. Serrano, E-Mail: mfabio@unsam.edu.ar

¶Centro de Matemática Aplicada, Univ. de San Martín, Argentina. E-Mail: cdattellis@yahoo.com.ar

Resumen

En el marco del análisis de señales perturbadas por ruido, en esta presentación proponemos una metodología de trabajo orientada a aprovechar la estimación óptima del filtrado de Kalman, combinándola con la caracterización que se logra aplicando un análisis de multirresolución (AMR) mediante onditas (wavelets).

Desde el punto de vista del filtrado de Kalman este procedimiento mixto es cuasi-óptimo, sin embargo la modificación que se introduce permite la aplicación simultánea de un esquema de eliminación de ruido con wavelets; con esto disminuye el costo computacional de aplicar ambos procedimientos por separado.

Nuestra propuesta consiste en procesar la señal por intervalos sucesivos no solapados, combinando el proceso de cálculo para el filtrado óptimo con un AMR usando la ondita de Haar. El método aprovecha la utilización conjunta de ambas herramientas (Kalman-Haar) y está exento de problemas de borde relacionados con la segmentación de la señal.

Palabras clave: Procesamiento de señales, filtro de Kalman, eliminación de ruido con onditas, análisis de multirresolución.

Abstract

Under the analysis of signals disturbed by noise, in this paper we propose a working methodology aimed to seize the best estimate of combining Kalman filtering with the characterization that is achieved by applying a multiresolution analysis (MRA) using wavelets.

From the standpoint of Kalman filtering this combined procedure is quasi-optimal, but the change to be made allows the simultaneous implementation of a scheme of wavelet denoising; with this decreases the computational cost of applying both procedures separately.

Our proposal is to process the signal by successive non-overlapping intervals, combining the process for calculating the optimal filter with a MRA using the Haar wavelet. The method takes advantage of the combined use of both tools (Kalman-Haar) and is free from edge problems related to the signal segmentation.

Keywords: Signal processing, Kalman filter, wavelet denoising, multiresolution analysis.

Mathematics Subject Classification: 42C40.

1 Introducción

Planteado el problema del procesamiento on-line de señales de larga duración perturbadas por ruido, interesa aprovechar la estimación óptima

provista por el filtrado de Kalman combinada con la caracterización mediante onditas (wavelets) en el marco del análisis de multirresolución (AMR). En este sentido, en el presente trabajo proponemos un método que permite procesar la señal segmentándola en intervalos sucesivos, no solapados, y combina los procesos de cálculo para el filtrado óptimo con los algoritmos relativos a un AMR basado en la onditas de Haar.

La metodología de trabajo que sugerimos aprovecha la utilización conjunta de ambas herramientas (Kalman-Haar) con bajo costo computacional y está exenta de problemas de borde relacionados con la segmentación de la señal. Desde el punto de vista del filtrado de Kalman, el método brinda una respuesta cuasi-óptima pero permite incorporar en forma simultánea un esquema de eliminación de ruido implementado mediante el AMR con la onditas de Haar.

1.1 Algoritmo de Kalman

El algoritmo de Kalman [4], [5] resuelve el problema de estimar los estados de un proceso estocástico cuyo modelo es un sistema lineal discreto del tipo:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A x_k + B u_k + w_k \\ y_k &= H x_k + v_k \end{cases} \quad (1)$$

donde x_k, u_k e y_k representan –respectivamente– el estado, el control y la observación del sistema en el tiempo discreto, $k \in \mathbb{Z}$. Por su parte, w_k y v_k son ruidos blancos gaussianos tales que [1]:

$$\begin{cases} E[w_k] &= 0 & \forall k \in \mathbb{Z} \\ E[v_k] &= 0 & \forall k \in \mathbb{Z} \\ E[w_k w_{k+n}^t] &= \delta_n Q & \forall k, n \in \mathbb{Z} \\ E[v_k v_{k+n}^t] &= \delta_n R & \forall k, n \in \mathbb{Z} \\ E[w_k v_n^t] &= 0 & \forall k, n \in \mathbb{Z} \\ E[x_0 w_k^t] &= 0 & \forall k \in \mathbb{Z} \\ E[x_0 v_k^t] &= 0 & \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

con $\delta_0 = 1$ y $\delta_n = 0$ si $n \neq 0$, siendo $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ las matrices constantes de covarianza de los ruidos que perturban al modelo y a las mediciones respectivamente.

En general

$$x, w \in \mathbb{R}^{n \times 1}, u \in \mathbb{R}^{p \times 1}, y, v \in \mathbb{R}^{m \times 1}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, H \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (3)$$

En este trabajo se consideran sistemas tales que las matrices A , B y H son constantes.

$$\hat{x}_{k-1} \xrightarrow{\text{predicción}} \hat{x}_k^- \xrightarrow{\text{corrección}} \hat{x}_k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Figura 1: Esquema de estimación de Kalman.

Siendo \hat{x}_k^- la estimación *a priori* de x_k obtenida en base a las mediciones y_i para tiempo discreto $i < k$, denotaremos \hat{x}_k a la estimación *a posteriori* de x_k cuando se conoce y_k .

Quedan entonces definidos dos errores, a saber:

$$\begin{aligned} \text{error a priori: } \Delta_k^- &= \hat{x}_k^- - x_k \quad \text{con covariancia } P_k^- = E[\Delta_k^- \Delta_k^{-t}], \\ \text{error a posteriori: } \Delta_k &= \hat{x}_k - x_k \quad \text{con covariancia } P_k = E[\Delta_k \Delta_k^t]. \end{aligned} \quad (4)$$

El esquema de Kalman, representado en la Fig. 1, establece un proceso iterativo de estimación que en el caso de matrices no necesariamente constantes contempla los siguientes cálculos para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\overbrace{\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1} \\ P_k^- &= A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^t + Q_{k-1} \end{aligned}}^{\text{predicción}} \end{aligned} \quad (5)$$

y

$$\begin{aligned} &\overbrace{\begin{aligned} K_k &= P_k^- H_k^t [H_k P_k^- H_k^t + R_k]^{-1} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) \\ P_k &= (I_n - K_k H_k) P_k^- \end{aligned}}^{\text{corrección}} \end{aligned} \quad (6)$$

donde $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Para comenzar el procedimiento deben definirse los valores iniciales \hat{x}_0 y P_0 , para ello –considerando las expresiones indicadas en (2) y (4)– es posible elegir $\hat{x}_0 = E[x_0] = 0$. Si el sistema dinámico es uniforme completamente observable y controlable, una condición inicial $P_0 \geq 0$ pierde influencia a medida que crece la cantidad de mediciones procesadas [1].

1.2 Análisis de multirresolución

Dada una señal $s_0 \in V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ en tiempo continuo t , consideremos su representación en serie de onditas (wavelets) según el conocido esquema de un análisis de multirresolución (AMR) con función de escala ϕ , siendo

$$s_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{0,k} \phi(t - k). \quad (7)$$

Denotando V_j a los subespacios del AMR y adoptando la convención $V_j \subset V_{j-1}$ con $j \in \mathbb{Z}$, cuando la ondita ψ es ortogonal resulta $V_{j-1} = W_j \oplus V_j$ donde W_j es el complemento ortogonal de V_j respecto de V_{j-1} . En este esquema se cumple que:

$$s_0 = r_1 + r_2 + \cdots + r_J + s_J \text{ con } r_j \in W_j \text{ y } s_J \in V_J, \text{ para todo } j \leq J \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} r_j(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad \text{y} \\ s_J(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{J,k} 2^{-J/2} \phi(2^{-J}t - k) \end{aligned} \quad (9)$$

con r_j señal residual del nivel de resolución j (proyección de s_0 sobre W_j), siendo s_J la proyección de s_0 sobre V_J .

Usando la ondita de Haar,

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1) \end{cases}, \quad \psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1), \quad (10)$$

resulta $\phi(n) = \delta_n$ para $n \in \mathbb{Z}$; obteniéndose los coeficientes en forma recursiva mediante:

$$c_{j,k} = \frac{c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+1}}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad d_{j,k} = \frac{c_{j-1,2k} - c_{j-1,2k+1}}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

donde suponemos que la señal se analiza en bloques de $2^J N$ valores con $N \in \mathbb{N}$, correspondiendo entonces $2^{J-j} N$ coeficientes de cada tipo en el nivel j de resolución ($j = 1, \dots, J$).

En particular, teniendo en cuenta (7) y (10), para $t = n \in \mathbb{N}$ se obtiene

$$s_0(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{0,k} \phi(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{0,k} \delta_{n-k} = c_{0,n}; \quad (12)$$

es decir, el proceso inicia tomando los valores de la señal muestreada como coeficientes del nivel 0 de resolución ($c_0(n) = s_0(n)$, $n \in \mathbb{Z}$).

2 Estimación del estado del sistema

Dado el modelo especificado según (1), (2) y (3) de la sección anterior, se plantea el problema de la estimación del estado x_k a partir de las observación (salida) y_k perturbada por ruido.

Suponiendo que las matrices A y H aseguran condiciones de estabilidad y observabilidad, destacamos las siguientes tres alternativas para el filtrado de la salida y estimación del estado del sistema.

2.1 Filtrado de Kalman

Consiste en utilizar el método iterativo propuesto por Rudolf Emil Kalman [4], [5]. Para ello se aplican las ecuaciones indicadas en (5) y (6) en el contexto del procedimiento expuesto en 1.1. Este procedimiento es un método conocido que permite estimar en forma eficiente el estado del sistema minimizando el error cuadrático medio.

2.2 Eliminación de ruido aplicando transformada ondita

En el marco del AMR de la salida y_k , siguiendo el esquema explicado en la sección 1.2, se aplica la transformada ondita seguida de una estrategia no lineal de eliminación de ruido (*denoising*). Finalmente se estima el estado usando las matrices A y H mediante las cuales se modeliza el sistema lineal según (1).

Es importante observar que si sólo se pretende estimar las variables de estado directamente observables a la salida, el modelo $[A, H]$ no es necesario; esto marca cierta ventaja de las onditas. Considérese, según (1), la salida

$$y_k = Hx_k + v_k \text{ con } y_k \in \mathbb{R}^{m \times 1} \quad (13)$$

y sin pérdida de generalidad, sea $m = 1$. En el caso general el método se aplica en forma vectorial para cada componente de y_k .

De acuerdo con lo indicado en (11), (12) y texto asociado, los coeficientes del análisis de multirresolución con la ondita de Haar son:

$$\begin{aligned} c_{1,k} &= 2^{-1/2}(y_{2k} + y_{2k+1}) \\ d_{1,k} &= 2^{-1/2}(y_{2k} - y_{2k+1}) \end{aligned} \quad y \quad (14)$$

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= 2^{-1/2}(c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+1}) \\ d_{j,k} &= 2^{-1/2}(c_{j-1,2k} - c_{j-1,2k+1}) \end{aligned} \quad , \quad j > 1. \quad (15)$$

Si las y_k son gaussianas también los coeficientes resultan gaussianos pero no necesariamente incorrelacionados. En general pueden expresarse:

$$c_{j,k} = c_{j,k}^{(0)} + c_{j,k}^{(1)} \quad , \quad d_{j,k} = d_{j,k}^{(0)} + d_{j,k}^{(1)} \quad (16)$$

donde la primera componente ($\bullet^{(0)}$) corresponde al sumando Hx_k de (13), y la segunda ($\bullet^{(1)}$) al ruido v_k .

En este contexto, si las variables de estado en alguna escala o intervalo fuesen tales que $d_{j,k}^{(0)} \cong 0$, prevalece el ruido. En tal caso, esta estrategia de eliminación de ruido se establece mediante:

$$\bar{d}_{j,k} = \begin{cases} sg(d_{j,k}) L(|d_{j,k}|) & \text{si } |d_{j,k}| \geq \sigma_j \\ 0 & \text{si } |d_{j,k}| < \sigma_j \end{cases} \quad (17)$$

donde L generalmente es una función lineal [6], [8] y σ_j es el umbral para el nivel de resolución j . De esta manera se filtra el ruido en zonas de bajo nivel de señal; así, al reconstruir, se mejora la relación señal/ruido.

Teniendo en cuenta que la señal tiene un contenido frecuencial en un intervalo $[f_{\text{mín}}, f_{\text{máx}}]$, el análisis de multirresolución se realiza para los niveles $j = 1, \dots, J$ tal que la energía de s_j sea despreciable. Entonces, para la reconstrucción, en (8) puede considerarse

$$s_0 \cong r_1 + \dots + r_J \quad (18)$$

con r_j según (9), donde se reemplaza cada $d_{j,k}$ por el correspondiente $\bar{d}_{j,k}$.

2.3 Estrategia mixta Kalman-Haar

Entre las múltiples variantes que se pueden analizar, en este trabajo proponemos un esquema sencillo en el que se utiliza la base de Haar. En primer lugar hacemos notar que en el proceso iterativo de Kalman –ver (5)– los coeficientes de corrección K_k pueden calcularse a priori, en forma independiente de cada realización. Por otra parte, K_k tiende a estabilizarse con k creciente hacia un K_∞ .

Supóngase entonces, en el esquema de Kalman según (5) con H constante, que se tienen los pares:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{2k} &= \hat{x}_{2k}^- + K_{2k} (y_{2k} - H \hat{x}_{2k}^-) \\ \hat{x}_{2k+1} &= \hat{x}_{2k+1}^- + K_{2k+1} (y_{2k+1} - H \hat{x}_{2k+1}^-) \end{aligned} \quad (19)$$

y que los valores \hat{x}_{2k}^- y \hat{x}_{2k+1}^- han sido calculados previamente.

La propuesta consiste en introducir la aproximación

$$K_{2k} \cong K_{2k+1} \cong \bar{K}_k = \frac{K_{2k} + K_{2k+1}}{2} \quad (20)$$

que reemplazada en las ecuaciones (19) permite obtener:

$$\frac{\hat{x}_{2k} + \hat{x}_{2k+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{x}_{2k}^- + \hat{x}_{2k+1}^-}{\sqrt{2}} + \bar{K}_k \left(\frac{y_{2k} + y_{2k+1}}{\sqrt{2}} - H \frac{\hat{x}_{2k}^- + \hat{x}_{2k+1}^-}{\sqrt{2}} \right) \quad (21)$$

y

$$\frac{\hat{x}_{2k} - \hat{x}_{2k+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{x}_{2k}^- - \hat{x}_{2k+1}^-}{\sqrt{2}} + \bar{K}_k \left(\frac{y_{2k} - y_{2k+1}}{\sqrt{2}} - H \frac{\hat{x}_{2k}^- - \hat{x}_{2k+1}^-}{\sqrt{2}} \right) \quad (22)$$

donde se observa que aparecen en el esquema los dos coeficientes de nivel 1 de resolución, correspondientes al AMR con la ondita de Haar aplicado a la señal que se mide. Estos coeficientes son

$$c_{1,k} = \frac{y_{2k} + y_{2k+1}}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad d_{1,k} = \frac{y_{2k} - y_{2k+1}}{\sqrt{2}} \quad (23)$$

dado que los $c_{0,k}$ son los y_k , según se ha expuesto para la ondita de Haar en 1.2.

Los resultados así obtenidos pueden generalizarse en el siguiente esquema, que describe la estrategia mixta para la aplicación conjunta Kalman-Haar que se propone:

1. Para $j = 0$ y $k = 0, 1, \dots$, calcular:
 - $K_{0,k} = K_k$.
 - $\hat{x}_{0,k} = \hat{x}_{0,k}^-$, según un método a decidir.
 - $y_{0,k} = y_k$, las salidas observadas (mediciones de la señal observada).
2. Para cada j con $1 \leq j \leq J$, calcular:
 - $\bar{K}_{j,k} = \frac{K_{j-1,2k} + K_{j-1,2k+1}}{2}$, $y_{j,k} = \frac{y_{j-1,2k} + y_{j-1,2k+1}}{\sqrt{2}}$, $d_{j,k} = \frac{y_{j-1,2k} - y_{j-1,2k+1}}{\sqrt{2}}$
 - Aplicar el esquema de eliminación de ruido con onditas a los coeficientes $d_{j,k}$.
 - Denotando $d\hat{x}_{j,k}$ a los coeficientes Haar de \hat{x} del nivel de resolución j , calcular:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{j,k} &= \frac{\hat{x}_{j-1,k} + \hat{x}_{j-1,2k+1}}{\sqrt{2}} + \bar{K}_{j,k} \left(y_{j,k} - H \frac{\hat{x}_{j-1,k} + \hat{x}_{j-1,2k+1}}{\sqrt{2}} \right) \\ d\hat{x}_{j,k} &= \frac{\hat{x}_{j-1,k} - \hat{x}_{j-1,2k+1}}{\sqrt{2}} + \bar{K}_{j,k} \left(y_{j,k} - H \frac{\hat{x}_{j-1,k} - \hat{x}_{j-1,2k+1}}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

3. Aplicar el esquema de reconstrucción del estado según (18) y el texto asociado.

Pueden considerarse diferentes variantes para el cálculo de los valores \hat{x}_k^- de la primer etapa, dos posibilidades extremas son:

- $\hat{x}_{k+1}^- = A \hat{x}_k^- + B u_k$ con \hat{x}_0 dato, sin la corrección de Kalman en el primer paso.
- Realizar la corrección del primer paso $\hat{x}_{k+1}^- = A \hat{x}_k^+ + B u_k$ en forma usual. Esto implica cierta reiteración del esquema predicción-corrección.

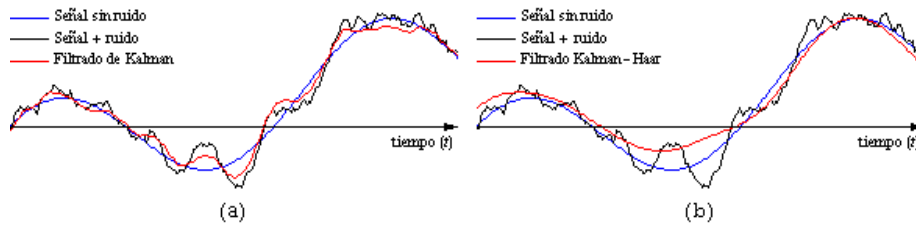


Figura 2: Visualización de un intervalo de señal pura (sin ruido), señal con ruido aditivo y el resultado del filtrado en dos casos: (a) mediante el algoritmo de Kalman, (b) con filtrado conjunto Kalman-Haar.

3 Simulación

A continuación se muestran los resultados obtenidos analizando un sistema simulado que responde al siguiente modelo en tiempo continuo:

$$\begin{aligned}
 X' &= A X + B u + w \\
 y &= H X + v \\
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = (1 \ 1) \\
 R &= 0.1, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \\
 u &= \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \text{ con } f(t) = \text{sen}(2\pi \frac{1}{64}t) + \text{sen}(2\pi \frac{1}{18}t) \\
 X_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

correspondiente a la respuesta de un sistema lineal que en su estado puro, sin ruido, se modeliza mediante la ecuación diferencial $z'' + z' + 2z = f(t)$ con condiciones iniciales $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$, donde se denota

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ con } x_1 = z, \quad x_2 = z';$$

el muestreo se realizó a intervalos regulares de tiempo $\Delta t = 0.1$, simulándose $2^{15} = 32768$ datos observables.

En la Fig. 2 se muestran los resultados durante un período de tiempo suficientemente corto como para poder observar los detalles del filtrado; en línea azul se grafica la señal sin ruido y en negro la señal con ruido aditivo. En rojo se grafican los resultados del filtrado, en (a) mediante el algoritmo de Kalman y en (b) con la estrategia de aplicación conjunta Kalman-Haar propuesta. Se puede observar que el filtrado Kalman-Haar produce una señal que sigue con mayor suavidad a la señal pura (sin ruido), mientras

que el método de Kalman muestra una respuesta con más irregularidades debidas a las altas frecuencias. Para el método mixto Kalman-Haar la reconstrucción se realizó utilizando los niveles de resolución $j = 5$ a $j = 12$ con umbrales $\sigma_5 = \dots = \sigma_{12} = 0.2$; en dichos niveles se concentra la mayor energía de la señal (en este caso $r_1 + \dots + r_4$ tiene energía despreciable).

4 Conclusiones

Existen múltiples trabajos que proponen diferentes metodologías para resolver problemas relacionados con el análisis de señales usando onditas o filtros de Kalman. Esquemas recursivos de filtrado y predicción usando onditas [6], métodos de estimación de señales fractales usando wavelets [2], de estimación de movimiento Browniano fraccionario con filtros de Kalman en bancos de filtros usando onditas [3], [9]. En este trabajo se presenta un esquema de trabajo para el filtrado de señales que, desde el punto de vista del procedimiento de Kalman, es cuasi-óptimo dado que no se respeta el cómputo de los coeficientes K_k según (5). Sin embargo, la modificación introducida usando los coeficientes promediados definidos en (20) permite –en beneficio del filtrado– la aplicación simultánea y adicional del esquema de eliminación de ruido con onditas (wavelet denoising).

La posibilidad de aplicar simultaneamente ambos procedimientos es importante cuando se enfoca el problema del análisis de señales de larga duración, pensando en implementar algún método de procesamiento tipo on-line. En este sentido, la metodología propuesta ofrece un menor costo computacional que el de aplicar ambos procedimientos por separado y está exenta de problemas de borde relacionados con la segmentación de la señal, lo cual permite el procesamiento de la misma a intervalos de tiempo consecutivos y no solapados.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Escuela Superior Técnica del Ejército Argentino (EST - IESE) y a la Universidad Nacional de San Martín (ECyT - UNSAM), Argentina, por su apoyo.

Referencias

- [1] D'Attellis, C.E. (1981) *Estimadores Óptimos y sus Aplicaciones*. CONICET, Argentina.
- [2] Hirchoren, G.A.; D'Attellis, C.E. (1998) "Estimation of fractal signals using wavelets and filter banks", *IEEE Trans. on Signal Processing* **46**(6): 1624–1630.

- [3] Hirchoren, G.A.; D'attellis, C.E. (1999) "Estimation of fractional brownian motion with multiresolution Kalman filter banks", *IEEE Trans. on Signal Processing* **47**(5): 1431–1434.
- [4] Kalman, R.E. (1960) "A new approach to linear filtering and prediction problems", *Trans. ASME-Journal of Basic Engineering* **82**: 35–45.
- [5] Kalman, R.E.; Bucy, R.S. (1961) "New results in linear filtering and prediction theory", *Trans. ASME-Journal of Basic Engineering*: 95–108.
- [6] Postalcioglu, S.; Erkan, K.; Bolat, E.D. (2005) "Comparison of Kalman filter and wavelet filter for denoising", en: IEEE Conference Proceedings *International Conference on Neural Network and Brain*, Vol 2, Beijing, China: 951–954.
- [7] Renaud, O.; Starck, J.; Murtagh, F. (2005) "Wavelet-based combined signal filtering and prediction", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics* **35**(6): 1241–1251.
- [8] Walnut, D.F. (2002) *An Introduction to Wavelet Analysis*. Birkhäuser, Boston.
- [9] Zhao, J.; Ma, H.; You, Z.; Umeda, M. (2001) *Lecture Notes in Computer Science: Multiscale Kalman filtering of fractal signals using wavelet transform*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg: 305–313.