

APLICACIÓN DEL MODELO DE FRACTURA FRACTAL DE BALANKIN AL MODELO FRACTAL DE LA ACTIVIDAD VOLCÁNICA

APPLICATION OF BALANKIN FRACTAL FRACTURE MODEL TO THE FRACTAL VOLCANIC ACTIVITY MODEL

José Brenes-André

Red Ciudadana de Estaciones Meteorológicas.
Apdo.290-3015 San Rafael de Heredia
Jbrenes54@gmail.com

(Recibido: 20/08/2013 ; aceptado: 22/01/2014)

ABSTRACT: The Sequential Fragmentation Theory (SFT, Brown, 1989) is based on sequential fragmentation at macroscopic level. Fractal model proposed by Brenes & Alvarado (2013), with the help of Hurst coefficient H, includes vesicle coalescence and their degassing, thus systematizing the whole process. In this work Balankin fractal fracture model is added. Volcanic fragmentation process is then explained from the micro to the macro level. The existence of two universal fracture values, already experimentally found, is predicted.

Keywords: Fractal fracture, Balankin model, universal exponents, 1723 Irazú eruption, Costa Rica.

RESUMEN: La Teoría de Fragmentación Secuencial (SFT por sus siglas en inglés) se basa en una fragmentación secuencial a nivel macroscópico (Brown, 1989). El modelo fractal propuesto en Brenes & Alvarado (2013), con la ayuda del coeficiente de Hurst H, incluye la coalescencia de vesículas y su eventual exsolución, sistematizando todo el proceso. En el presente trabajo se amplía el modelo para incluir procesos de fractura a nivel microscópico, usando el modelo de fractura fractal propuesto por Balankin (1997). Esta inclusión no solo permite explicar el proceso completo, desde el nivel micro al macro, sino que también predice la existencia de dos valores de fractura, de carácter universal, que previamente se habían encontrado experimentalmente.

Palabras clave: Fractura fractal, modelo de Balankin, exponentes universales, Irazú, erupción de 1723, Costa Rica.

INTRODUCCIÓN

La metodología SFT parte del análisis que Brown (1989) hace de la fragmentación, como un proceso secuencial, basado en dos supuestos: a) la suma de las masa de todos los productos en un tiempo t debe siempre ser igual a la masa inicial M , según el principio de conservación de la masa. b) la distribución de las masas debe ser fractal. Tanto Brown (1989), como Wohletz et al. (1989) dedujeron la distribución de Weibull a partir de principios físicos generales, sin incluir un modelo específico de mecanismo de fractura, dando origen a la SFT (*Sequential Fragmentation and Transport*). Dado el carácter fractal de las subpoblaciones, resultantes al aplicar SFT, se supone que estas reflejan el proceso de fractura a niveles microscópicos.

A pesar de lo exitoso del modelo, queda el interrogante de qué tan pequeñas pueden ser las partículas y aun ser SFT válida. Una interrogante similar puede hacerse a la definición de la nueva dimensión fractal hecha en Brenes (2013), o al modelo fractal propuesto en Brenes & Alvarado (2013).

En Balankin (1997), aplicando principios físicos a la naturaleza fractal de la fractura a nivel micro, se deduce que el factor de intensidad de esfuerzos puede estar elevado a dos exponentes diferentes, α y β , según el tamaño de la partícula en cuestión. Ambos exponentes están en función de una dimensión topológica y un coeficiente de Hurst apropiados.

La respuesta a esas interrogantes es que la SFT vale desde un nivel microscópico, ya que, como se mostrará en este trabajo, la propuesta de Balankin (1997) se fundirá de manera coherente con la SFT (Brown, 1989) y con la del modelo fractal de fractura propuesto en Brenes (2013) y Brenes & Alvarado (2013). Esta fusión permite obtener información más detallada del proceso eruptivo, y una explicación teórica plausible de dos valores experimentales de H , que se han conjeturado como universales. El trabajo se divide en 5 partes: a) una revisión de los procesos fundamentales involucrados en la eyección de fragmentos, b) una presentación somera del modelo fractal de fractura de Balankin, c) una descripción

de cómo el modelo de Balankin se incorpora en el modelo fractal, d) el análisis de resultados intermedios y su comparación con valores citados en la literatura, incluyendo una breve aplicación al caso de la erupción de 1723 del Irazú, y e) una revisión de los dos valores universales de H y su interpretación a la luz de la unión aquí presentada.

REVISIÓN RÁPIDA DEL PROCESO ERUPTIVO

Un elemento fundamental del proceso eruptivo es el proceso de nucleación de las vesículas del magma, y su crecimiento conforme el magma se descompresiona al ir ascendiendo, y el rompimiento efusivo o explosivo de las mismas. Dado que las vesículas son fracturas que van creciendo, se analizará el proceso iniciando en los campos de esfuerzo producidos por las fracturas más pequeñas.

De manera breve, se parte de que el contacto entre el magma ascendente y las fuentes de agua superficiales dan como resultado un intercambio calórico que involucra el área expuesta del material, dando como resultado una película de vapor de agua, tanto por la ebullición como por la coalescencia de pequeñas burbujas presentes en el magma. De no producirse esa película, la transferencia de energía del magma al agua se incrementa en uno o dos órdenes de magnitud (Fiedler et al., 1980). Un posible mecanismo de fractura propone que el vapor sobrecalentado alcanza una temperatura máxima (Wohletz, 1986), causando que el volumen aumente, acelerando violentamente el magma hasta que se fragmenta. También puede darse que el vapor atrapado en el magma de origen a un efecto boyante que haga ascender al magma. Al subir las presiones a que está sometido disminuyen, promoviendo la ebullición del agua en pequeñas cantidades de vapor que constituyen la típica actividad freatomagmática. Por último, es posible que por influencia de ondas de choque (de origen sísmico) la película de vapor colapse en cuestión de nanosegundos (Zimanowski et al, 1997, Zimanowski, 1998), generando esfuerzos térmicos en la roca circundante causando una fracturación.

Aunque las fracturas no pueden abrirse en materiales bajo compresión, si lo pueden hacer si el material está en equilibrio en compresión, y al ascender las presiones externas disminuyen, resultando menores que las internas, dando como resultado un campo efectivo de tensión.

MODELO DE FRACTURA FRACTAL DE BALANKIN

El análisis que aquí se presenta es a nivel macroscópico, y se lleva a cabo con la teoría del continuo, que no considera el carácter molecular del material, por lo se pueden tomar las derivadas espaciales en cualquier punto del material. Esa aproximación deja de ser aplicable a niveles moleculares, en donde se debe incluir las fluctuaciones de ese campo, así como el hecho de que ninguna fractura puede ser una línea recta matemática.

Nos concentraremos en fracturas de Modo I (Swedlow, 1965) pues es el dominante (Yavari, 2000), En este caso los esfuerzos de tensión se deben a que la nucleación inicial se produce a altas presiones exteriores, las que van disminuyendo conforme el magma asciende. En materiales como el granito y otras rocas cristalinas bajo confinamiento, un aumento en la presión conlleva a un cambio en los procesos de micro-fracturación (Escartin et al., 1997; Velde et al., 1993). A presiones bajas, el proceso dominante es el de fracturas bajo tensión (Modo I), paralelas a la dirección del esfuerzo principal. Conforme aumenta la presión, las fracturas bajo tensión son remplazadas por fracturas en cortante (Modos II, III). Este cambio del proceso a micro-escala está asociado a una disminución de la fricción interna. Así mismo, un aumento de presión causa que la fracturación intergranular sea remplazada progresivamente por colapso de poros.

A ese nivel, Campos et al. (2005) establecen que el esfuerzo en el extremo de una fractura está dado por $\sigma_{ij} = K_f (r/l_0)^{-\alpha}$, donde l_0 es una dimensión característica. El exponente α asociado al esfuerzo en la vecindad de la fractura está dado por $\alpha = [Hd - (d - 1)]/2H$, donde d es la dimensión del problema elástico considerado, H es el

exponente de la rugosidad de la fractura (también conocido como exponente de Hurst), y K_f es el factor fractal de intensidad del esfuerzo. Esta relación se obtuvo analizando fracturas auto afines, de manera que el caso de la mecánica de fracturas, lineales y elásticas se vuelve un caso especial aplicable a longitudes mayores que la longitud de correlación (Balankin, 1997).

La relación para el exponente α encontrada por Balankin (1997), es válida en el ámbito $l_0 < r < \xi_c$, en donde r se mide a partir del extremo de la fractura, lo es una función de las características micro-mecánicas del material y ξ_c está relacionada con la forma geométrica del material que se fracciona. Valores típicos de $l_0 \approx 10^{-8}$ m para materiales quebradizos, equivalente a $\phi \approx 8$, y $\xi_c \approx 10^{-2}$ m, que corresponden a granos de $\phi \approx -3$, permiten aplicar la teoría a las erupciones del Volcán Irazú.

Para $r > \xi_c$ Balankin propone otra relación de potencia dada por $\sigma_{ij} = K_f (r/l_0)^{-\beta}$ donde el exponente $\beta = (2H - 1)/2H$.

INCLUSIÓN DE BALANKIN EN EL MODELO FRACTAL

Las condiciones de presión y temperatura durante una erupción, tanto del magma como del conducto, son imposibles de conocerse directamente, impidiendo tener una idea aproximada del ámbito en que α aplica. Por ello, se puede suponer, como ruta alterna, que la relación es válida durante una erupción, y que los valores de d y H serían los del modelo fractal propuesto en Brenes & Alvarado (2013). El razonamiento sería el siguiente: a) Cada evento eruptivo da origen a partículas de tamaño variable en proporciones determinadas, debido a las condiciones mecánicas y termodinámicas existentes durante la erupción. b) Las partículas son agrupadas, con ayuda de la SFT, en subpoblaciones que comparten, por medio de un valor definido de dispersión $\gamma < 0$, una dimensión fractal específica $D = -3\gamma$, que podemos asociar a la existente durante el proceso de fragmentación. c) La propuesta de la nueva dimensión fractal $D_1 = 3(1+\gamma)$, para $\gamma > 0$, asociada a procesos de coalescencia de vesículas permite la

definición de un modelo fractal que sistematiza ambos casos al proponer un coeficiente de rugosidad o de Hurst, $H = 1 - |\gamma|$.

Justificación del cambio de la dimensión topológica d a la dimensión fractal

El modelo de Balankin incluye tanto el coeficiente de Hurst como la dimensión topológica d del problema elástico, igual a 2 si analizamos un problema superficial, y a 3 si es volumétrico, algo que se considera puede verse desde otra óptica. Empezamos considerando a una fractura como una distorsión local de un arreglo ordenado de partículas, con su propia simetría, como es el caso de los cristales. La simetría particular resultante será producto de la auto-organización de las partículas causado por fuerzas moleculares no isotrópicas, y por consideraciones energéticas, que se vuelven evidentes al tratar con un número relativamente grande de partículas. De hecho, estas ideas subyacen a la propuesta de Griffith (Swedlow, 1965) al analizar una fractura como un proceso de equilibrio cuasiestacionario. Por lo tanto, se propone que la dimensión d del modelo de Balankin debiera ser la dimensión fractal de la fractura misma, porque la fractura es un proceso auto-organizado en que la dimensión y su entorno se afectan mutuamente. Este argumento es concordante con la propuesta de Lu et al. (2005), donde una caída súbita de la dimensión fractal es un posible precursor de una falla catastrófica. De hecho, para ser congruentes, la fractura existirá cuando las minifracturas se unan en una sola, y se fracture completamente la partícula. Esto sería análogo al caso de una cadena de eslabones que se rompe por el eslabón más débil, lo que explica la deducción de la función de Weibull, y lo correcto de usar el valor de γ , obtenido por SFT, en nuestro análisis.

El caso de la dimensión D_1 , requiere un análisis aparte por corresponder a una fragmentación secundaria, es decir, al rompimiento de las vesículas que quedan expuestas cuando se fragmenta el magma vesicular. O bien, al caso de coalescencia, cuando las vesículas se unen por efecto del crecimiento de las vesículas dentro de la partícula.

La dimensión fractal D_1 incluye entonces efectos como el causado por la tensión superficial del magma al unirse dos vesículas y cambiar su presión interna (amplían su volumen sin cambiar la masa de los volátiles). Además incluye la energía involucrada por la compresibilidad del material, las variaciones en la forma del campo de esfuerzos en el extremo de la fractura, etc. Esta aproximación al problema está en línea con los trabajos de de Dreuzzy et al. (2000) al redefinir el volumen excluido como el parámetro para percolación, que se mantiene invariante de escala hasta la percolación total. La idea del volumen excluido consiste en considerar que el grado de traslape de las burbujas, de diversos tamaños, se puede tratar estadísticamente, y determinar así la eficiencia con que esas burbujas pueden conectarse. Además, de Dreuzzy et al. (2000) mostraron que usando distribuciones de ley de potencias es posible variar el umbral de percolación en un ámbito mayor al esperado. En el Apéndice se muestra como esta solución es compatible con una redefinición del factor de intensidad de esfuerzos K_f sin que pierda su carácter fractal.

La inclusión en el mismo exponente α , tanto de la dimensión fractal d como del coeficiente de rugosidad, puede ponerse a prueba en las deducciones que se hagan, y en su concordancia con los resultados experimentales.

Modelo fractal completo

Las ideas desarrolladas líneas arriba pueden sistematizarse en el modelo que se presenta a continuación. Para ayudar a su comprensión, se hará uso del fractal de Cantor, muy utilizado en el proceso de fracturas (Fig. 1)

Se parte de la expresión para el exponente $\alpha = (dH - (d-1))/2H$ deducida por Balankin (1997). Los casos límite de $d=3$ ($\alpha = (3H - 2)/2H$) y $d=2$ ($\alpha = (2H - 1)/2H$) pueden ser también deducidos por conservación de la energía (ecuaciones 32 y 11, Yavari et al., 2002), para el caso específico de régimen persistente.

Se propone que el paso de $d=3$ a $d=2$, no se lleva a cabo de manera discreta sino continua, y que debe usarse $d = D = -3\gamma$ para $\gamma \leq 0$. Igualmente

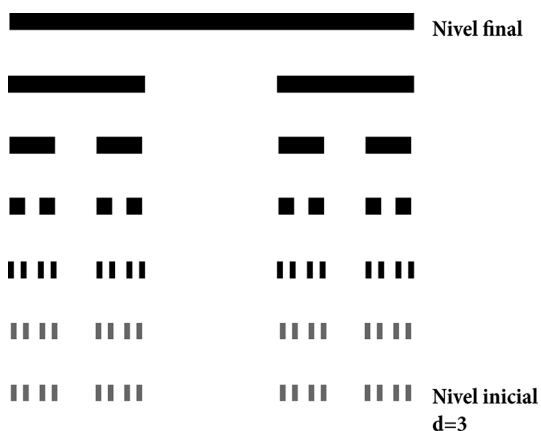


Fig. 1: Modelo unidimensional del polvo de Cantor.

se propone que la expresión $\alpha = (dH - (d-1))/2H$ también vale para $\gamma \geq 0$, con el apropiado cambio de $d = D = 3(1 + \gamma)$, dado que la coalescencia de vesículas se da vía la fracturación del material que las divide. La propuesta de que el exponente α depende de γ es otra manera de decir que depende de la longitud de la fractura en todo momento, como se ha sospechado desde hace un tiempo. La ecuación (3.28) de Wnuk & Yavari (2008) precisamente cuantifica como esa dependencia varía conforme la fractura crece. En otras palabras, la propuesta de volver d una función de γ es una manera de incluir el efecto de “Mirror-Mist-Hackle”.

De esta manera, el nivel inicial (en la figura 1 sería el de 64 fracturas) estaría definido por un conjunto de microfrazas muy pequeñas, que permite iniciar con $d=3$ en el modelo de Balankin para α . Por coalescencia de fracturas se evolucionaría al siguiente nivel (con 32 fracturas), con una nueva dimensión $d = -3\gamma_1 < 3$. Una nueva coalescencia llevará al siguiente nivel (16 fracturas) con $d = -3\gamma_2 < -3\gamma_1$, y así sucesivamente hasta alcanzar la coalescencia total (en la que la partícula se fractura en dos partes independientes) asociada a $d = -3\gamma_{\text{final}}$. El valor de γ_{final} será el obtenido al aplicar SFT a las granulometrías.

Cada paso es energéticamente más estable, lo que está de acuerdo con la suposición de que se va creando una zona de distorsión plástica que va liberando esfuerzos. Dado el carácter auto-afín de la fractura es razonable establecer que la relación final de $D = -3\gamma$ es válida para los procesos previos, con

un valor de γ diferente para cada uno de ellos. Esta idea está en línea con la observación de Balankin (1996) de que existen, cerca del extremo de la fractura, dos tipos diferentes de comportamiento: quebradizo y dúctil, y con la observación de que $H < H^*$ (definido en el original) corresponde a $D_B > D_B^*$, correspondiente a la dimensión fractal. Aplicando $H = 1 - |\gamma|$ y $D = -3\gamma$ encontramos que $H < H^*$ implica $\gamma < \gamma^*$ que lleva a $D_B = -3\gamma > -3\gamma^* = D_B^*$. Una deducción equivalente puede hacerse a partir de Wohletz et al. (1983), pues para el régimen persistente, el valor de γ aumenta conforme las partículas van disminuyendo de tamaño debido a la fragmentación. Así, para $\phi_2 > \phi_1$ se tiene que $\gamma_2 > \gamma_1$, que implica $H_1 < H_2$ y por lo tanto $D_2 < D_1$ como se propuso.

Una deducción similar puede establecerse para cuando el resultado final esté dado por $D = 3(1 + \gamma_{\text{final}})$ en el ámbito $\gamma \geq 0$. Desde el punto de vista energético, la sucesión de γ para cada proceso lleva a niveles energéticamente más estables, pues los volátiles atrapados en las vesículas se irían liberando. En ambos casos el punto $\gamma = 0$, correspondiente al caso de deformación lineal, aparece como límite.

Por lo tanto, en un gráfico de α vs γ , la curva de α para el ámbito $-1 \geq \gamma \geq 0$ (con $D = -3\gamma$), y para el ámbito $\gamma \geq 0$ (con $D = 3(1 + \gamma)$) juegan el mismo rol que las curvas que dividen dos fases diferentes (líquido y gas, por ejemplo), pues la variable γ es continua. El valor específico de $\gamma = \gamma_{\text{final}}$ obtenido de SFT dependerá de la distribución inicial de fracturas.

Los resultados del cálculo de los exponentes α y β , utilizando el valor de $H = 1 - |\gamma|$, $D = -3\gamma$ y $D_1 = 3(1 + \gamma)$, se muestran sistematizados en los cuadros 1 y 2.

Por la definición de α , ésta debe ser positiva para que tenga sentido físico, pues el esfuerzo debe tender a 0 para distancias apreciables a partir del extremo de la fractura. Los valores de D_0 y $H_0 = (d-1)/d$ se calcularon con el γ_0 evaluado a partir de la condición límite $\alpha = 0$. Para cumplir la condición de persistencia ($H \geq 1/2$) se debe tener $d \geq 2$. Similarmente, $\beta > 0$ para que la fractura tenga sentido físico. Nótese que $\beta = 0$ lleva a $H = 1/2$, por lo que $\beta > 0$ implica persistencia ($H > 1/2$). Experimentalmente se ha encontrado que el

Cuadro 1

Cálculo del exponente α propuesto por Balankin (1996) utilizando el valor de γ de SFT.

γ	D	H	A	γ_0	D_0	H_0
Negativa	-3γ	$1 + \gamma$	$[1 - 3\gamma^2]/2(1 + \gamma)$	-0,577	1,732	0,423
Positiva	$3(1 + \gamma)$	$1 - \gamma$	$[1 - 3\gamma - 3\gamma^2]/2(1 - \gamma)$	0,263	3,791	0,737

esfuerzo σ_{ij} puede aumentar a distancias pequeñas (Balankin, 1996), para eventualmente tender a cero al aumentar la distancia.

ANÁLISIS

Análisis general

En el modelo propuesto en Brenes & Alvarado (2013), el ámbito $\gamma \in (-1,1)$ se dividió en 2 casos específicos: uno de fractura ($-1 < \gamma \leq 0$), y otro de coalescencia de vesículas ($0 \leq \gamma < 1$). Cada uno a su vez fue dividido según si presentaba características de antipersistencia (ámbitos $-1 < \gamma \leq -0,5$ y $0,5 \leq \gamma < 1$), y de persistencia (ámbitos $-0,5 \leq \gamma < 0$ y $0 \leq \gamma \leq 0,5$), basados en el coeficiente de Hurst. Balankin (1997), procede de manera similar al utilizar la relación de ley de potencia $r-\alpha$, con la condición $\alpha \geq 0$. El ámbito correspondiente a $-0,5 \leq \gamma < 0,5$ lo asocia a fracturas en materiales quebradizos, y el resto a fracturas en un material dúctil.

En el modelo fractal el ámbito $\gamma \in (-1, -0,5)$ es asociado a un régimen antipersistente ($0 \leq H < 0,5$). Según Wohletz (1989), corresponde a procesos magmáticos, en tanto que Balankin lo asocia a materiales dúctiles, ambas posiciones concuerdan con las innumerables bombas piroclásticas deformadas que se observan en este tipo de actividades.

Para el ámbito $\gamma \in (-0,5, 0,5)$, el modelo fractal lo asocia, debido al carácter persistente del

fenómeno, a procesos hidrovulcánicos. Balankin (1997), por su parte, lo asocia al carácter quebradizo de los materiales involucrados.

El modelo fractal propone $H = 1 - |\gamma|$, sin hacer distinción entre los mecanismos de fractura y coalescencia de vesículas, pues las vesículas coalescen cuando los extremos de las fracturas vecinas se unen. Balankin (1997) igualmente encuentra un exponente $\alpha = [Hd - (d - 1)]/2H$ que no distingue entre los posibles mecanismos de fractura.

Cambio de fase geométrico

Se deduce entonces que el pase de un régimen anti-persistente a uno persistente conlleva un cambio en las propiedades reológicas, justamente lo que Gaonac'h et al. (2007) proponen. Según ellos, la vesicularidad vuelve el material más susceptible a fragmentación secundaria, volviéndolo más frágil, llevándolo a un cambio de fase geométrico. Esta apreciación está en concordancia con lo medular de la propuesta del modelo fractal: a) el parámetro γ propuesto por SFT tiene una base física, b) existe una sola relación de H con γ : $H = 1 - |\gamma|$, c) la dimensión fractal $D_1 = 3(1 + \gamma)$ resulta mayor que la dimensión Euclideana debido a que el entero n (de relación de Mandelbrot $D + H = n + 1$), vale 0 (geoméricamente la dimensión de un punto) para fracturas primarias, y 1 (una línea) para fracturas secundarias.

Cuadro 2

Cálculo del exponente β propuesto por Balankin (1996) utilizando el valor de γ de SFT.

γ	D	H	β	γ_0	D_0	H_0
Negativa	-3γ	$1 + \gamma$	$[1 + 2\gamma]/2(1 + \gamma)$	-0,5	1,5	0,5
Positiva	$3(1 + \gamma)$	$1 - \gamma$	$[1 - 2\gamma]/2(1 - \gamma)$	0,5	4,5	0,5

En el modelo fractal, la división natural entre la fragmentación primaria y la fragmentación secundaria lo constituye $\gamma = 0$, que corresponde a $H = 1$, y que constituye según Balankin al caso de una fractura ideal, en un régimen elástico. En el caso de la erupción volcánica se interpreta de dos maneras diferentes: a) para el caso de $\gamma < 0$, estaríamos hablando del interface entre la partícula y el vapor de agua, es decir, la superficie externa de la partícula; b) para $\gamma > 0$ estamos tratando de vesículas muy cercanas a la superficie que van fragmentando pasivamente, como se encontró en el caso del Irazú con $\gamma \approx 0,01$, que corresponden a magma efusivo (Brenes & Alvarado, 2013).

¿Son el modelo de fractura fractal y el de Balankin compatibles?

La relación del exponente α propuesta por Balankin tanto con D como con H , se obtuvo por argumentos físicos aplicados al proceso microscópico de fragmentación (nivel local del proceso). Las relaciones de D y H con la variable γ , para el caso de SFT, se derivaron a partir de principios generales (nivel global del proceso). Una predicción confiable sobre cómo se comportará el material volcánico en el proceso de fractura debe partir de la premisa que los efectos macroscópicos están predeterminados por procesos a nivel microscópico, y por la inter-relación de procesos a nano-, micro- y macro-escalas. En la figura 2 se presenta evidencia experimental de 4 subpoblaciones con una $\gamma > 0$ asociada a una fragmentación secundaria originada en la subpoblación de tamaño inmediatamente mayor. Independientemente de las diferentes condiciones termodinámicas que les dieron origen, se obtiene la misma probabilidad del $\approx 6\%$ de fragmentarse. El hecho de que se pueda definir un solo porcentaje respecto a la energía total está en acuerdo con la hipótesis de que la disipación de energía es proporcional a la superficie de los fragmentos. También está en acuerdo con la propuesta de Carpinteri et al. (2004) de que la fricción, más que el daño interno, son la causa predominante de disipación de energía. Por lo tanto, ¿qué tan razonables sean los resultados al substituir las relaciones de D y H de

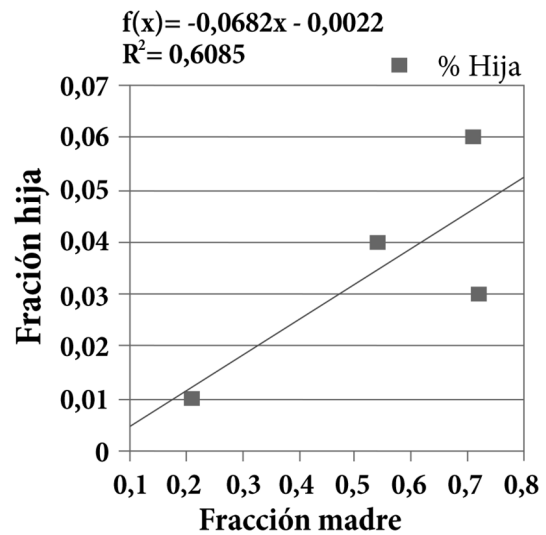


Fig. 2: Relación entre la fracción de la subpoblación original y la fracción de la subpoblación descendente.

SFT en el α propuesto por Balankin (1997)?, se vuelve una prueba muy estricta de la coherencia total del modelo fractal propuesto.

Denominaremos α^- al exponente α (para $\gamma \leq 0$) calculado a partir de $D = -3\gamma$, y α^+ al calculado (para $\gamma \geq 0$) a partir de $D = 3(1 + \gamma)$. No se hace esta distinción para el exponente β por depender exclusivamente del $|\gamma|$. En lo que sigue suponemos que el valor de K_f es el mismo para todos los casos, y que las relaciones de σ_{ij} valen para $(t/l_0) > 1$.

Para facilitar el análisis siguiente, en la figura 3 se muestran los gráficos de α^+ , α^- y β con respecto a la dispersión γ .

Caso de exsolución

Aunque para $\gamma = 0$ la curva de α^- tiene el mismo valor de 0,5 que la de α^+ , no hay una solución de continuidad, pues la primera tiene una pendiente de $-1/2$, en tanto la segunda de -1 . Esto lo interpretamos como que se refieren a dos mecanismos diferentes, como se propone en el modelo fractal: fragmentación primaria el primero, en tanto, que exsolución por fragmentación secundaria el segundo. La coincidencia de α^+ y β en el límite elástico $\gamma = 0$ se interpreta como la posibilidad de que una

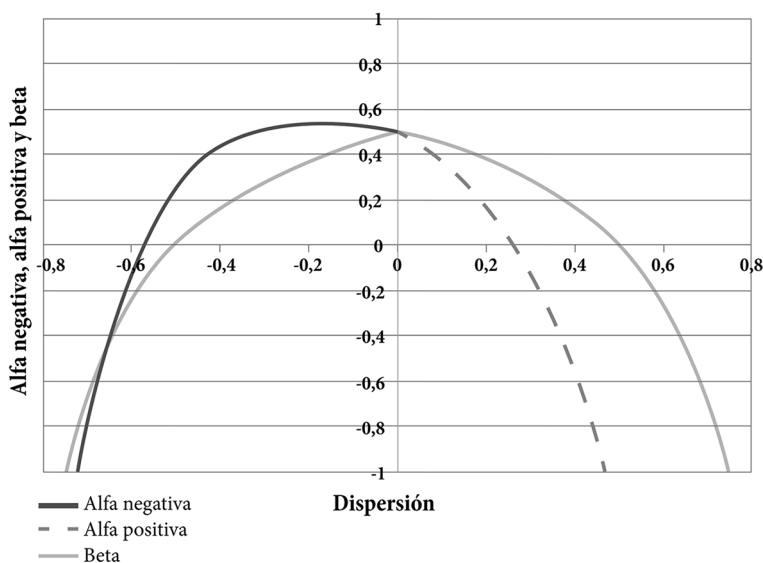


Fig. 3: Gráfico de los exponentes $\alpha = [Hd - (d - 1)] / 2H$, $\beta = (2H - 1) / 2H$ propuestos por Balankin (1996), versus la dispersión γ calculada por SFT.

fractura interna pueda ir creciendo en una forma afectada por el resto de la partícula, y eventualmente fragmentar la partícula. De esta manera, la fractura interna afecta el tamaño de la misma, y por lo tanto, el $\gamma < 0$ asociado.

Para el ámbito $0 < \gamma < 0,5$, se obtiene $\alpha^+ < \beta$ que implica $\sigma(\alpha^+) \gg \sigma(\beta)$. El esfuerzo para el régimen r^α será entonces el predominante para el ámbito $0 < \gamma \leq \gamma_{\max} = 0,263$. Este valor máximo equivale a $D_{\max} = 3(1 + \gamma_{\max}) = 3,79$, muy cercano al valor de D máximo en que se pueda dar una exsolución del 100%, en el caso monodisperso donde todas las vesículas básicas tienen el mismo tamaño (Kaminski & Jaupart, 1998). A pesar de la crítica de Goanoc'h et al (2007), sobre lo apropiado que pueda ser el término “dimensión fractal”, en el trabajo de Kaminsky & Jaupart (1998), proponen la relación $D = 3B_{3f}$, donde B_{3f} es el índice de fragmentación en 3 dimensiones. En el presente caso, se ha calculado $D = 3,79$ lo que implica $B_{3f} = 1,263$, que compara bastante bien con el valor experimental aproximado de $1,1 \pm 0,1$.

Vemos entonces que el modelo fractal aplicado al modelo de Balankin predice correctamente la existencia de un proceso de exsolución.

Fragmentación por colisión

La curva de α^- se continua con la de β (para $\gamma \geq 0$) tanto en el valor de 0,5, como en la misma pendiente de $-1/2$ para $\gamma = 0$, el límite elástico, lo que sugiere que las fracturas asociadas a $\gamma < 0$ se deben al mecanismo $\sigma_{ij} = K_f (r/l_0)^{-\alpha}$, que es válido para $l_0 < r < \xi_c$. En tanto, para $\gamma > 0$ el mecanismo predominante está definido por $\sigma_{ij} = K_f (r/l_0)^{-\beta}$, válido para $\xi_c < r$. En aquellos fragmentos de tamaño mayor a ξ_c pueden darse fracturas con γ en el ámbito $(-0,5, +0,5)$, asociado a un régimen persistente, como lo predice el modelo fractal.

Para el ámbito $0 < \gamma < 0,5$, se obtiene $\alpha^+ < \beta$ que implica $\sigma(\alpha^+) \gg \sigma(\beta)$. Para el ámbito $0,263 < \gamma < 0,5$ el único mecanismo posible será el asociado a r^β , lo que sugiere que valores de $0,263 <$

γ solo pueden darse en fragmentos de diámetro mayor a 1 cm. Por lo tanto, la unión de SFT con Balankin predice la posibilidad de que fracturas internas eventualmente lleven a que la partícula se fragmente de manera menos violenta, por colisiones

Caso freatomagmático

Para el ámbito $-0,5 < \gamma < 0$ se encuentra que $\alpha > \beta$ lo que implica $\sigma(\alpha) \ll \sigma(\beta)$, o sea, el esfuerzo asociado al mecanismo r^α es menor que el esfuerzo asociado al mecanismo r^β , que sería el dominante. En este régimen persistente, a partir de $\alpha \geq 0$ se deduce un ámbito de γ de ($\gamma_{\min} = -0,577, 0$), que concuerda muy bien con los límites experimentales reportados por Wohletz et al. (1989) para el caso freatomagmático: $(-0,53, 0)$, obtenidos a partir de SFT aplicado a granulometrías de diversos volcanes. Es importante indicar que se tiene $\gamma_{\min} < -0,53$; lo que confirma su carácter de límite mínimo. Sin embargo, fragmentos de tamaño menor a ≈ 1 cm (ξ_c) solo pueden mostrar fracturas asociadas a r^α , y serían las únicas que mostrarían $-0,577 < \gamma < -0,5$.

El caso en que los coeficientes K_f asociados a los exponentes α y β sean diferentes es visto en el apéndice.

Comprobación con la erupción de 1723 del Irazú

La erupción de año 1723 del volcán Irazú (Cartago, Costa Rica) fue estudiada en detalle por Alvarado & Schminke (2013), Brenes & Alvarado (2013), y Brenes (2013).

La propuesta de SFT (Wohletz et al., 1989) muestra que conforme variamos γ de -1 a -0,5, las curvas de $dM/d\phi$ versus ϕ , para valores de γ crecientes, llevan hacia tefras más finas, al punto de que para $\gamma = -0,5$ se asocia un modo de $\phi =$

9, equivalente a 2×10^{-6} m, el límite inferior para que α sea válido. Esta puede ser la causa por la que las explosiones estrombolianas no muestran un $\gamma > -0,5$.

La erupción de 1723 del Irazú muestra dos instancias en que $\gamma < \gamma_{\max}$, asociados a diámetros de fragmento menores al límite de $10^{-3} - 10^{-2}$ m indicado por Balankin (1997), y otro con $\gamma \approx 0,5 \gg \gamma_{\max}$, pero para partículas de mayor tamaño, volviéndose un ejemplo de que es necesario indicar el tamaño de la muestra cuando se analizan fracturas, como lo propone Balankin (Cuadro 3).

Otra prueba experimental de lo apropiado que es este modelo se obtiene al graficar el coeficiente de Hurst de todas las subpoblaciones de 1723 contra el modo (Fig. 4). Como el coeficiente α depende de la dimensión fractal D , hay dos posibles expresiones: $D = -3\gamma$, asociada a fracturas superficiales con $\gamma \geq -0,577$ ($H \geq 0,423, D \leq 1,732$) y $D = 3(1+\gamma)$, asociada a coalescencia de vesículas con $\gamma \leq 0,263$ ($H \geq 0,737, D \leq 3,789$)

En el gráfico se pueden establecer zonas muy bien definidas:

a) un grupo de puntos con $H^+ \approx 1$, sin ninguna relación con el modo, todos relacionados con coalescencia. Estos puntos se pueden asociar a un magma efusivo, según Karpinski & Jaupart (1999), y a que el magma en estado fluido puede romperse en fragmentos de tamaño variable, que rápidamente se solidifican. Los valores de H^+ para $\phi \approx -6$, como se indicó en Brenes & Alvarado (2013), son sospechosos por estar muy cerca del límite superior de las muestras;

b) dos zonas limitadas por $\phi \approx 0$, que es el tamaño máximo en que el exponente α de Balankin es válido (10^{-3} m), más allá del cual solo el exponente β de Balankin es válido. Este límite lo había también propuesto Wohletz et al (1983) como el que divide la fragmentación magmática de la hidrovulcánica.

c) La zona $\phi < 0$, correspondiente a aquella en que solo el exponente β es válido, en la que la mayoría de los H^+ son menores a 0,5, por lo que se

Cuadro 3

Discriminación por tamaño de la aplicación de los exponentes α y β según lo propone Balankin.

Muestra	Phi	Diámetro (mm)	γ
Ira1/2	-1,76	3	0,25
Ira1/4	0,20	0,5	0,23
Ira1/4	-3,27	10	0,49

deben asociar a un régimen magmático (en nuestro caso estromboliano) anti-persistente, y en la que los ϕ cubren el ámbito de 0 a -6.

d) La zona $\phi > 0$, en la que tanto el coeficiente β como el coeficiente α tienen validez. La mayoría de los puntos cumplen con $H < 0,4$, son asociados a un régimen anti-persistente (estromboliano en nuestro caso), y sus correspondientes valores de ϕ cubren el ámbito 0 a 5. Por el contrario, solo hay un punto ($\phi = 2,2$; $d = 0,2$ mm) con prácticamente límite mínimo para persistencia ($H = 0,423$), correspondiente a la subpoblación 2 de Ira1/20, y otro ($\phi = 0,2$; d) con el límite mínimo de $H^+ = 0,737$. Se observan también dos puntos con un $H \approx 0,7$ para $\phi \approx 0$ que sugieren un proceso de coalescencia muy cercano a la superficie que no permite al SFT distinguir entre ambos.

EXPONENTES UNIVERSALES

Al analizar fractalmente las fracturas en forma experimental en rocas y otros materiales, repetidamente se han encontrado dos dimensiones fractales con valores de $\approx 0,5$ y $\approx 0,8$, lo que ha generado conjeturas sobre si son valores universales, esto es, que no dependen del material. Nukala et al. (2006) contiene una serie de referencias sobre experiencias en cerámica, roca, vidrio y metal con dimensiones fractales cercanas a 0,8 que sugieren su carácter universal. Modelajes computacionales, como los de Hansen & Schmittbuhl (2003), han buscado dar una explicación a esa independencia del material usando analogías. En los párrafos siguientes presentamos una manera

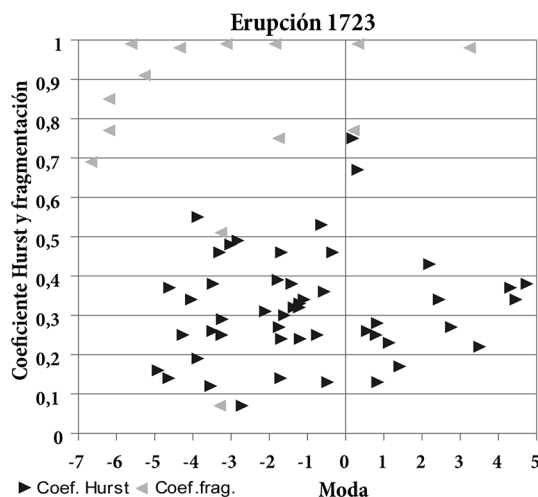


Fig. 4: Gráfico del Coeficiente de Hurst versus la moda.

simple, basada en la unión de SFT y Balankin aquí propuesta, de deducir ambos valores a partir de principios generales.

En Ponson (2006), se reporta un valor de $0,76 \pm 0,03$ independiente de material y de velocidad de crecimiento en un rango que varía de ultra-lento (picómetros por segundo) hasta rápido (metros por segundo), que se asocia a una ruptura transgranular. También indica que para arenisca porosa (3% a 26%) obtiene un coeficiente de rugosidad de $0,40 \pm 0,03$, perpendicularmente a la dirección de crecimiento de la fractura, que asocia a crecimiento intragranular. Advierte, sin embargo, que el modo de fractura en cerámica vidriosa (*glass ceramics*) con baja porosidad es transgranular, en tanto, que con alta porosidad es intergranular, sin afectar el valor del coeficiente de rugosidad.

Por su parte, Bouchaud et al. (2002) proponen un mecanismo diferente de fragmentación y comentan otras 4 posibles explicaciones. No obstante, en ningún momento ponen en duda la existencia de los 2 valores: $\approx 0,5$ y $\approx 0,8$. Voss (1985) indica que el valor de $H \approx 0,8$ es una buena escogencia para muchos fenómenos naturales.

Yavari et al. (2002), en su estudio sobre las fracturas auto-afines, indica claramente que para ese caso, las singularidades aparecen por incluir condiciones de orden local, y llama la atención

que para $H \geq 1/2$ en la mayoría de los materiales utilizados en la ingeniería se encuentran valores de $H \approx 0,7$.

Los valores de H_0 (Cuadro 1) se acercan a $H_2 \approx 0,45$, asociado a fracturas lentas, y a $H_1 \approx 0,84$ asociado a fracturas rápidas (Balankin, 1997). Esta última asociación es razonable pues correspondería a la coalescencia de vesículas por la interacción de los campos de esfuerzos de los extremos de dos fracturas vecinas, que facilita la unión.

Por lo anterior proponemos que los valores de H mencionados en la literatura corresponden a los H_0 obtenidos de $\alpha = 0$, asociados a la extinción de los esfuerzos de fractura.

¿Por qué solo dos valores?

Los argumentos presentados justifican la existencia de dos valores de γ , como casos límites asociados a la extinción de esfuerzos, que son ambos corroborados con medidas en fracturas en rocas. Sin embargo, experimentalmente la metodología SFT da como resultado un amplio ámbito de dispersiones γ . Surge entonces la interrogante de cómo ese amplio ámbito tiende a solo dos valores universales. Si bien los γ del SFT están relacionados con el tamaño final, no podemos dejar de lado que ese tamaño fue producto de fracturas que eventualmente dejaron de existir al convertirse en parte de la superficie exterior de las partículas. Tales fracturas fueron producto, como ya se mencionó, de esfuerzos causados por la rápida descompresión de los fragmentos al ascender el magma, en los que el Modo I eventualmente se vuelve el predominante. Un buen análisis de este proceso se encuentra en Fowler et al. (2009). Se propone, por lo tanto, que los valores de γ , correspondientes a $\alpha = 0$, son los que persisten ya que en los fragmentos aun calientes, las fracturas continúan creciendo hasta que el esfuerzo en sus extremos se anula. (Kaminsky & Jaupart, 1987; Giachetti et al., 2010). Como resultado, los valores de γ se acercan a γ_{\min} para el caso de fracturas superficiales, y a γ_{\max} para fragmentaciones

secundarias. En resumen, los datos obtenidos por SFT concuerdan completamente con las obtenidas a partir de la propuesta de Balankin.

COMPROBACIÓN POR RENORMALIZACIÓN

La propuesta aquí presentada puede comprobarse en su totalidad con la ayuda de la teoría de renormalización.

Consideremos un cubo de arista h al que cada lado se divide por la mitad, obteniéndose así 8 cubos de arista $(h/2)$. Se denominará $p = p_f$ la probabilidad de que un cubo sea dividido en 8 cubos más pequeños. Es posible demostrar que el proceso tiene una dimensión fractal $D = 3 \log 8p_f / \log 8$, (Turcotte, 1986). Por renormalización se puede mostrar que la D es independiente de la manera en que se fragmenta el cubo. Dado el carácter fractal del proceso de fractura es razonable igualar $D = -3\gamma_f$ obtenida de SFT, a la dimensión fractal D obtenida a partir de la división del cubo, obteniéndose $\gamma_f = -\log 8p_f / \log 8$.

Consideraremos la coalescencia como un proceso de fragmentación que se desarrolla hacia atrás en el tiempo, y como los razonamientos que llevan a la relación $\gamma = \log 8p / \log 8$ son aun aplicables, usaremos $p = p_c$ y $1/8$ en lugar de 8, pues ahora en lugar de la transición $h \rightarrow h/2$ tendremos $h \rightarrow 2h$. Por lo tanto $\gamma_1 = \log (p_c/8) / \log (1/8) = 1 - \log p_c / \log 8$. Del modelo fractal $\gamma_1 = 1 + \gamma^+$, donde $\gamma^+ > 0$ es el valor obtenido de SFT, se deduce $\gamma^+ = -\log p_c / \log 8$.

Para el modo de fragmentación la persistencia se asocia con $0,35 \geq p \geq 0,125$, lo que sugiere la necesidad de un agente externo para que se dé el proceso. La anti persistencia, por su parte, cubre el ámbito mayor de $1 \geq p \geq 0,35$ sugere de que la fragmentación es posible por sí misma, como sucede con las erupciones estrombolianas. Al acercarse γ a -1 la probabilidad se acerca a 1, o sea es explosiva tal y como lo propone SFT. Una más reciente sugerencia en esa misma dirección se encuentra en Cimarelli et al. (2012).

Para el caso de coalescencia, valores de $\gamma = 0,01$ a $0,02$ encontrados en el Irazú, y que se asocian a procesos efusivos (piscinas de lava, sensu Brenes, 2013), corresponden a una probabilidad igual a 1. En este modo la situación es lo opuesto: el mayor ámbito de $1 \geq p \geq 0,35$ requiere de un agente externo, al estar asociado a persistencia, coherente con su asociación a una exsolución. De la figura 4 puede obtenerse mayor información con ayuda de Hernández (2003).

Análisis de fragmentación secundaria

En Brenes & Alvarado (2013) se mostró que la coalescencia de vesículas podía ser analizada a partir de una nueva dimensión fractal $D_1 = 3(1 + \gamma^+)$ en línea con la dimensión $D = 3 + C$ propuesta por Kaminsky & Jaupart. (1986), quienes proponen que la fragmentación de magma vesiculado deja expuestas vesículas que eventualmente terminan rompiéndose. Es de esperarse entonces, que el tamaño de las partículas que exsolvén sea menor que el de la partícula madre.

Prueba crítica

La prueba crítica de la unión de SFT con el modelo de Balankin, desarrollada en este trabajo, consiste en comprobar si la relación $p_c = 1 - p_f$ se cumple a partir de valores experimentales de γ obtenidos de las granulometrías de la erupción de 1723. La escogencia de esta igualdad de probabilidades se hizo siguiendo el esquema siguiente: si el cubo original contiene masa (columna Hay) y al medio entra una “pared” de vacío el cubo se fragmentó (con una probabilidad P_f); si el cubo original está vacío (columna Hay) y al medio hay una pared de material y se le saca (columna Sale) las dos vesículas sufrieron coalescencia con una probabilidad P_c . Los otros dos casos, por ser opuestos, tienen, respectivamente, probabilidades de $1 - P_f$ y $1 - P_c$ respectivamente. Por último, como el fenómeno involucra a los dos materiales simultáneamente, consideramos que $P_c = 1 - P_f$. En otras palabras, la probabilidad de que se pueda tener una coalescencia

completa (P_c) es igual a la probabilidad de que la partícula no se fragmente en el proceso ($1 - P_f$) (Cuadro 4).

En la cuadro 5 se presentan la fracción calculada por SFT de esa sub-población, el respectivo valor de γ , la probabilidad de fragmentación calculada a partir de γ , la γ^+ observada, la P_c calculada a partir de la γ^+ observada, y su fracción respectiva (Fig. 5). Se observa que para los 4 casos de $\gamma^+ < 0,5$ (todos en régimen persistente) los valores calculados son cercanos a los observados, y que la partícula original es siempre de tamaño mayor que la que exsolvén.

CONCLUSIONES

La SFT fue desarrollada por Wohletz et al. (1989) sin considerar explícitamente un mecanismo de fractura específico, por lo que incluye solo efectos globales, a nivel macroscópico. La SFT fue ampliada en Brenes (2013) recurriendo al coeficiente de rugosidad o de Hurst, calculado a partir de la relación de Mandelbrot, a partir de un modelo de dos fases: una fragmentación primaria y una secundaria, incluyendo así la exsolución como un fenómeno más a ser tratado por la SFT. Los valores de fragmentación obtenidos por SFT son analizados por medio del coeficiente de Hurst, hallándose que se pueden proponer dos fases en una erupción: la persistente, y la anti-persistente, a las que puede asociarse una relación lineal entre el coeficiente de fragmentación y la moda

En el presente trabajo, la SFT ha sido ampliada para incluir el modelo de fragmentación propuesto por Balankin, lo que permite derivar de consideraciones totalmente geométricas el valor límite de $\gamma = -0,57$ que experimentalmente divide los procesos estrombolianos de los freatomagmáticos. Igualmente se ha deducido el valor de $D =$

Cuadro 4

Probabilidad de coalescencia

Prob	Sale	Hay	Entra	Prob
1-Pf	Vacío	Masa	Vacío	Pf
Pc	Masa	Vacío	Masa	1 - Pc

Cuadro 5

Cálculo de las probabilidades de fragmentación Pf y de coalescencia Pc deducidas de la re-normalización.

Muestra	Fracción	γ	Pf	γ^*	Pc	Fracción
Ira1/2	0,54	-0,52	0,369	0,25	0,595	0,04
Ira1/4	0,71	-0,81	0,674	0,49	0,361	0,06
Ira1/4	0,21	-0,70	0,536	0,23	0,620	0,01
Ira1/12	0,72	-0,93	0,865	0,93	0,145	0,03
Valor		-0,577	0,415	0,263	0,579	

3,79 propuesto por Kaminsky & Jaupart (1999) como aquel en que se da el 100% de exsolución, obtenida a partir de un modelo particular. Se muestra de esta manera presenta una explicación de por qué ambos valores, $H = 0,76 \pm 0,03$ y $H = 0,40 \pm 0,03$ son universales.

La teoría de re-normalización se usó como base para deducir una relación lineal entre dos probabilidades que se constituye en una prueba crítica de todo el modelo propuesto, lo que se comprueba correctamente para 4 casos de fragmentación fragmentaria y el par de valores universales. Se demuestra de esta manera que el parámetro γ es más general de lo esperado.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Dr. A. Balankin quien encontró este trabajo "muy interesante" y aconsejó su publicación, al Dr Guillermo Alvarado por un muy completo trabajo de edición. Igualmente se agradece a los dos árbitros anónimos quienes dedicaron tiempo para revisarlo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALANKIN, A., 1996: Mechanics of self-affine cracks: the concept of equivalent traction, path integrals and energy release rate.- *Rev. Mexicana de Física*, 42(2): 161-171.
- BALANKIN, A., 1997: Physics of fracture and mechanics of self-affine cracks.- *Eng. Frac. Mech.* 57: 135-203.

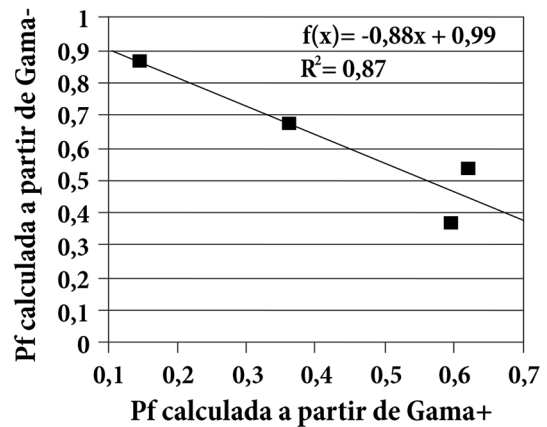


Fig. 5: Relación lineal de Pf con PC, obtenida a partir de re-normalización.

BOUCHAUD, E., BOUCHAUD, J.P., FISHER, D. S., RAMANATHAN, S. & RICE, J.R., 2008: Can crack front waves explain the roughness of cracks?.- *J. Mech. Phys. Sol.* 50: 1703-1725

BRENES, J., 2013: Aplicación de la teoría de fragmentación/transporte secuencial a los depósitos de las erupciones 1723 y 1963-65 del Irazú, Costa Rica. Caso dispersión negativa.- *Rev. Geol. Amér. Central*, 48: 63-85.

BRENES, J., & ALVARADO, G., 2013: Aplicación de la teoría de fragmentación/transporte secuencial a los depósitos de las erupciones 1723 y 1963-65 del Irazú, Costa Rica. Caso dispersión positiva y modelo fractal.- *Rev. Geol. Amér. Central*, 48: 87-98.

BROWN, W.K., 1989: A theory of sequential fragmentation and its astronomical applications.- *J. Astrophys. Astr.* 10: 89- 112.

CAMPOS, I., BALANKIN, A., BAUTISTA, O. & RAMÍREZ, G., 2005: Self-affine cracks in a brittle porous material.- *Theor. App. Frac. Mech.* 44: 187-191.

CAREY, R.J., HOUGHTON B.F. & THORDARSON, T., 2009: Abrupt shifts between wet and dry phases of the 1875

- eruption of Askja Volcano: Microscopic evidence for macroscopic dynamics.- *J. Volcan. Geother. R.* 184: 256–270.
- CARPINTERI, A., LACIDOGNA, G. & PUGNO, N., 2004: Scaling of energy dissipation in crushing and fragmentation: a fractal and statistical analysis based on particle size distribution.- *Int. J. Fracture*, 129: 131–139.
- CIMARELLI, C., DI TRAGLIA, F., VONA, A. & TADDEUCCI, J., 2012: Tephra architecture, pyroclast texture and magma rheology of mafic, ash-dominated eruptions: the violent strombolian phase of the Pleistocene Croscat (NE Spain) eruption.- *Geophys. R. Abs. Vol. 14, EGU2012-3205*, 2012
- DE DREUZY, J. R., DAVY, P. & BOUR, O., 2000: Percolation parameter and percolation-threshold estimates for three-dimensional random ellipses with widely scattered distributions of eccentricity and size.- *Phys. Rev E Stat Phys Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Topics Nov*;62 (5 Pt A): 5948-52.
- ESCARTIN, J., HIRTH, G. & EVANS, B., 1997: Non dilatant brittle deformation of serpentinites: Implications for Mohr-Coulomb theory and the strength of fault.- *J. Geophys. Res.* 102(B2): 2897-213.
- FIEDLER, A., FRÖHLICH, G., MÜLLER, G., BENZ, R., BÜRGER, M., SCHWALBE, W., & UNGER, H., 1980: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Dampfexplosion. *IKE 2 BMFT RS 206*, 72.
- FOWLER, A. C., SCHEU, B., LEE, W. T. & MCGUINNESS, M.J., 2009: A theoretical model of the explosive fragmentation of vesicular magma.- *Royal Society A: Mathematical, Physical Engineering Sc.* 466, 2115, 731
- GAONAC'H, H., LOVEJOY, S., CARRIER-NUNES, M., SCHERTZER, D. & LEPINE, F., 2007: Percolating magmas in three dimensions.- *Nonlin. Processes Geophys.* 14: 743–755.
- GIACHETTI, T., DRUITT, T.H., BURGISSER, A., ARBARET, L. & GALVEN, C., 2010: Bubble nucleation, growth and coalescence during the 1997 vulcanian explosions of Soufrière Hills Volcano, Montserrat.- *J. Geother. Volcan. Res.* 193: 215-231.
- HANSEN, A. & SCHMITTBUHL, J., 2003: Origin of the universal roughness exponent of brittle fracture surfaces: stress-weighted percolation in the damage zone.- *Phys. Rev. Lett.* 90: 045504-1 - 045504-4
- HERNANDEZ, G., 2003: Two-dimensional model for binary fragmentation process with random system of forces, random stopping and material resistance.- *Physica, A* 323 : 1-8.
- KAMINSKI, E. & JAUPART, C., 1997: Expansion and quenching of vesicular magma fragments in plinian eruptions.- *J. Geophys. Res.* 102: 12,187- 12,203.
- KAMINSKI, E. & JAUPART, C., 1998: The size distribution of pyroclasts and the fragmentation sequence in explosive volcanic eruptions.- *J. Geophys. Res.* 103: 29,759-29,779.
- LU, C; MAI; Y.-W., & XIE, H., 2005. A sudden drop of fractal dimension: a likely precursor of catastrophic failure in disordered media.- *Phil Mag Lett* 85(1): 33-40.
- NUKALA, P.K.V.V., SIMUNOVIĆ, S. & MILLS, R. T., 2006: Statistical physics of fracture: scientific discovery through high-performance computing.- *J. Phys.: Conference Series*, 46: 278–291.

- PONSON, L. 2007: Crack propagation in disordered materials How to decipher fracture surfaces.- *Ann. Phys. Fr.* 32: 1-120
- SWEDLOW, J. 1965. On Griffith's theory of fracture.- *Int. J. Fracture Mechanics*, 1(3): 210-216.
- TURCOTTE, D.L., 1986: Fractals and fragmentation.- *J. Geophys. Res.* 91: 1921-1926.
- VELDE, B., MOORE, D., BADRI, A. & LEDESERT, B., 1993: Fractal analysis of fractures during brittle to ductile changes.- *J. Geophys. Res.* 98(B7): 113-121.
- VOSS, R.F., 1985: Random fractals: characterization and measurement.- En: PUNN, R. & SKJELTORP, A. (eds): *Scaling phenomena in disordered systems*, Plenum, N.Y., 1-11.
- WNUK, M. & YAVARI, A., 2008: Discrete fractal fracture mechanics.- *Eng. fract. Mech.* 75(5): 1127: 1142.
- WOHLETZ, K. H., 1983: Mechanisms of hydrovolcanic pyro-clast formation: grain size, scanning electron micro-copy, and experimental results.- *J. Volcan. Geotherm. Res.* 17, 31-63.
- WOHLETZ, K.H., 1986, Explosive magma-water interactions: Thermodynamics, explosion mechanisms, and field studies.- *Bull. Volcanol.* 48: 245-264.
- WOHLETZ, K.H., SHERIDAN, M.F. & BROWN, K., 1989: Particle size distribution and the sequential fragmentation/transport theory applied to volcanic ash.- *J. Geophys. Res.* 94: 15,703-15,721.
- YAVARI, A., HOCKETT, K. & SARKANI, S., 2000: The fourth mode of fracture in fractal fracture mechanics.- *Int. J. Fracture*, 101: 365-384, 2000.
- YAVARI, A, SARKANI, S. & MOYER, E.T., 2002: The mechanics of self-similar and self-affine fractal cracks.- *Int. J. Fracture*, 114: 1-27.
- ZIMANOWSKI, B., BÜTTNER, R., LORENZ, V., & HÄFELE, H.G., 1997: Fragmentation of basaltic melt in the course of explosion volcanism.- *J. Geophys. Res.* 102: 803-814.
- ZIMANOWSKI, B., 1998: Phreatomagmatic explosions.- En: FREUNDT, A. & ROSI, M. (eds): *From magma to tephra: modeling physical processes of explosive volcanic eruptions*.- Elsevier, Amsterdam, 25-53.

APÉNDICE

Como se ha indicado, el ámbito $-0,5 \leq \gamma \leq 0$, al igual que $0 \leq \gamma \leq 0,5$, es persistente. El valor de H es el mismo para un valor de γ determinado en esos ámbitos, sin importar el signo, y los exponentes α y β tienden al mismo valor de 0,5 (propio de la teoría elástica continua) cuando $\gamma \rightarrow 0$ para ambos casos: D , y D_1 , lo que crea una cierta simetría alrededor del eje $\gamma = 0$. Por lo tanto, para un γ tal que $\gamma = \delta$ para $\gamma > 0$, y $-\gamma = \delta$ para $\gamma < 0$, podemos escribir

$$\alpha_1 = [HD_1 - (D_1 - 1)]/2H = [HD - (D - 1)]/2H + 3\delta(H - 1)/2H = \alpha - 3(1 - H)^2/2H = \alpha - \Delta$$

donde $0 \leq \Delta \leq 0,75$, pues $0,5 \leq H \leq 1$. Para el caso límite $H = 1$ se obtiene $\alpha_1 = \alpha$ como debiera pues estamos ante una fractura ideal. Recordando que $\sigma_{ij} = K_f (r/l_o)^{-\alpha}$ y $\sigma_{ij}^1 = K_f^1 (r/l_o^1)^{-\alpha}$ se obtiene $\sigma_{ij}^1 = [K_f^1/K_f] [r/l_o^1]^\alpha \sigma_{ij}$. El coeficiente $[r/l_o^1]^\alpha$ vale para $r \leq l_o^1$. Por ende, la definición de D_1 permite mantener el carácter fractal del tensor de esfuerzos σ_{ij} tanto en una fractura superficial, como en el caso de vesículas, y ambas están relacionadas entre sí como se espera pues el material es el mismo, y solo han cambiado las condiciones en que se dan las fracturas.

Por su parte, el exponente $\beta = (2H - 1)/2H$ aplica a dimensiones mayores a l_0 , lo que puede explicar el por qué es el mismo para γ positivo y negativo, tal como es el caso para Δ . Este tipo de situaciones, denominada *cross-over*, en que el exponente fractal cambia de valor al cambiar la

escala en que es medido no es excepcional a este caso. Aquí estaríamos refiriéndonos al material más alejado del extremo de la fractura, que no está muy disturbado por una sola fractura, pero si es afectado por el campo de esfuerzos promedio de varias de ellas, reflejado en el H.

