

Anexo

1. Diagnóstico del estado actual de la dinámica del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior

El **objetivo del diagnóstico** enunciado, es identificar las limitaciones existentes en este proceso, que influyen en el razonamiento lógico de los estudiantes para la resolución de problemas matemáticos. En su realización, se recomienda la aplicación de instrumentos tales como: encuestas a estudiantes y profesores, guías de observación a clases, pruebas pedagógicas, entre otros. Sus resultados fundamentan la necesidad de aplicación de la estrategia propuesta.

Para este diagnóstico, se proponen los siguientes **indicadores evaluativos**:

- Relación que se establece entre la Matemática y las disciplinas que componen el plan curricular.
- Nivel de contextualización de los contenidos matemáticos, en correspondencia con el perfil profesional de los estudiantes.
- Protagonismo de los estudiantes en la propuesta de alternativas para la resolución de los problemas matemáticos planteados.
- Empleo de sistemas computarizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Superior.
- Grado de interpretación de los resultados de los ejercicios y problemas matemáticos, en correspondencia con las necesidades de aplicación práctica.

Los indicadores mencionados, desempeñan un rol transcendental para la implementación de la estrategia propuesta, porque permiten a los sujetos implicados en este proceso, la identificación de los aspectos esenciales que están siendo inconsistentes en la dinámica del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior; la comprensión de las potencialidades y limitaciones que poseen los estudiantes en cuanto al análisis interpretativo de los problemas y resultados, así como en el adecuado manejo de las nuevas tecnologías diseñadas para la dinamización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Superior.

El **objetivo general** de la presente estrategia consiste en contribuir al perfeccionamiento del proceso de formación interpretativa de los estudiantes, en la

Matemática Superior, mediante procesos de sistematización epistemológica y metodológica, que conllevan a la optimización interpretativa de los resultados.

2. Orientaciones metodológicas generales para la instrumentación de la estrategia

Para la instrumentación de la presente estrategia en la práctica educativa, se necesita tener presente las siguientes orientaciones metodológicas:

- Analizar el orden estructural de los contenidos del programa, y sugerir reajustes que no violen la lógica de apropiación de los contenidos específicos de una determinada asignatura.
- Precisar las formas y tipologías de clases para abordar y evaluar las distintas temáticas de una determinada asignatura, ya sea mediante clases teóricas y prácticas (conferencias, clases prácticas, seminarios, laboratorios virtuales) o a través de la investigación científica y la práctica laboral.
- Planificar las actividades docentes a desarrollar en cada tema, en correspondencia con los recursos didácticos requeridos para el tratamiento de un contenido específico, lo cual no implica alterar el número de horas que se establece en el programa.
- Incentivar y fundamentar la necesidad del empleo de Asistentes Matemáticos en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática Superior.
- Orientar la bibliografía específica y complementaria para elevar los niveles de apropiación de los contenidos tratados en una temática determinada.
- Incentivar en los estudiantes la búsqueda de información específica y complementaria en Internet, como alternativa para profundizar en el contenido y desarrollar nuevas habilidades tecnológicas.

3. Proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior

Para dinamizar el proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior se establecen tres subprocesos, que contienen objetivos específicos y acciones concretas para potenciar el desarrollo del pensamiento interpretativo de los estudiantes universitarios.

Se parte desde la observación contextualizada de la realidad matemática, hasta la identificación de problemas, mediante procesos continuos de interpretación lógico-formal y dialéctica de la realidad matemática, como un **primer subproceso** del proceso de formación

interpretativa en la Matemática Superior, donde se integra el método deductivo, propio de la Matemática y el enfoque hermenéutico-dialéctico desde una perspectiva general.

El **segundo subproceso** se desarrolla desde la sistematización epistemológica y metodológica de contenidos matemáticos, síntesis de la estrategia propuesta y que son abordados en un clima de interactividad constante entre los sujetos implicados en el proceso. Este subproceso funciona como eje dinamizador en el proceso de desarrollo del pensamiento lógico e interpretativo de los estudiantes universitarios, para la resolución de los problemas identificados y enriquecer la comprensión de la realidad matemática.

El **tercer subproceso** se desarrolla desde la asimilación de los símbolos más empleados en la Matemática Superior y la apropiación de los procedimientos de socialización de conocimientos, métodos y técnicas, como configuraciones que requieren de un lenguaje coherente, que favorece la optimización interpretativa de los resultados para su generalización en la solución de problemas concretos de la vida y de la profesión.

En la presente estrategia, los subprocesos planteados se constituyen en estadios del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior. Los tres se contraponen y presuponen en una constante relación dialéctica en la que los estudiantes y profesores participan activamente en el desarrollo de las acciones conducentes a su perfeccionamiento.

Para la elaboración de los objetivos específicos de los subprocesos de la estrategia propuesta, así como la estructuración de sus correspondientes acciones, se tomaron como base las configuraciones y eslabones revelados en la modelación de la dinámica del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior. (Gungula 2014, pp. 42-60).

4. Subproceso 1. Reconocimiento matemático de la realidad observada

Objetivo: Reconocer el potencial formativo de la Matemática y el rol que desempeña en el proceso de interpretación lógica de la realidad observada.

Acciones:

Orientar la observación contextualizada de la realidad matemática a través de:

- Búsquedas diversificadas de contenidos, que permitan el reconocimiento matemático de la realidad observada, su comprensión, significación e interpretación.
- Debates sobre la importancia de la Matemática en la solución de problemas concretos de la vida real.
- Interacciones críticas y auto-críticas sobre el papel que les corresponde a los estudiantes y profesores en la transformación de la realidad matemática.

- Interpretaciones contextualizadas sobre la significación de la realidad matemática que revelen nuevos sentidos y significados en los aspectos observados.
- Valoraciones sobre los aspectos observados por cada uno de los estudiantes y el rol que desempeñan en el proceso de desarrollo del pensamiento matemático.
- Determinación de los rasgos y características de la realidad matemática para la aplicación y transformación de la realidad social.

5. Subproceso 2. Sistematización epistemológica y metodológica de contenidos matemáticos

Objetivo: Sistematizar los contenidos, métodos, procedimientos y técnicas que fortalezcan la comprensión matemática y faciliten la solución de problemas concretos de la vida y de la profesión.

Acciones:

Orientar la sistematización epistemológica y metodológica de contenidos matemáticos mediante:

- Estudios sobre las diferentes teorías, métodos y procedimientos que guardan relación con la Matemática, para la solución de los problemas que se dan dentro y fuera de las instituciones educativas.
- Reconocimiento y organización lógica de los contenidos y métodos que facilitan la resolución de un determinado ejercicio o problema matemático.
- Planteamiento de problemas matemáticos contextualizados, que promuevan el aprendizaje significativo, necesidades investigativas; que requieran el empleo de sistemas computarizados, de modo que se visualice la optimización del tiempo de cálculo y se estimule el interés de los estudiantes hacia nuevas experimentaciones.
- Predicción de los procedimientos de resolución de los problemas matemáticos planteados y de sus resultados antes que se demuestren totalmente o se observen empíricamente.
- Solución de situaciones problemáticas a partir del reconocimiento de las diferencias analíticas e interpretativas existentes entre los estudiantes, de modo que les posibilite apreciar la relación que se establece entre la ciencia, la tecnología y el desarrollo socioeconómico de las naciones.

- Desarrollo de tareas extra-clases, que lleven a cada estudiante a revelar nuevas carencias en Matemática, que propicien el tránsito desde la reproducción hacia la creación, así como a argumentar la necesidad de contextualización de las alternativas propuestas para solucionarlas.

6. Subproceso 3. Optimización interpretativa de los resultados

Objetivo: Emplear procedimientos de análisis e interpretación matemática de los resultados, de modo que faciliten su comprensión, optimización y socialización.

Acciones:

Orientar el análisis y la optimización interpretativa de los resultados mediante:

- Reconocimiento de la relación que se establece entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural en el proceso de interpretación de los resultados.
- Exposición lógica y argumentada de los resultados para que los estudiantes desarrollen nuevas habilidades de expresión oral.
- Empleo de un lenguaje matemático preciso en la justificación y argumentación de los resultados, para que los estudiantes se apropien del lenguaje característico de la Matemática.
- Adecuado manejo de medios de enseñanza-aprendizaje que dinamicen y fortalezcan la lógica de interpretación matemática, (gráficos, videos, programas, u otros medios disponibles).
- Discusión de resultados donde los estudiantes asuman una posición científica, metodológica y tecnológica que les permita argumentar lógicamente sus posicionamientos.
- Socialización y argumentación de los resultados como alternativa para la corrección de equivocaciones interpretativas, mediante técnicas de confrontación de ideas.

7. Sistema de evaluación y control de la efectividad de las acciones propuestas

La presente estrategia cuenta con un sistema de evaluación y control de la efectividad de las acciones propuestas para el perfeccionamiento sistemático del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior. Posee la flexibilidad de implementación de cambios

pertinentes en cada uno de sus subprocesos, en aras de enriquecer la concreción de sus acciones, ajustarlas y reorientarlas para lograr aprendizajes cada vez más significativos.

El control se materializa en el sistema de evaluación del cumplimiento de las acciones propuestas y las transformaciones que van ocurriendo en el desempeño de los estudiantes, al apropiarse de la lógica de interpretación de los ejercicios, problemas matemáticos y de sus resultados.

8. Evaluación de la estrategia

Una vez finalizada la aplicación de la estrategia, se procede a su evaluación como un todo. Se incluyen las sugerencias conducentes a su perfeccionamiento, emitidas en el ámbito de las deficiencias detectadas para el cumplimiento de los objetivos trazados, así como aumentar el nivel de concreción y de eficiencia de las acciones propuestas para la transformación cualitativa del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior.

9. Indicadores para la evaluación del proceso de implementación de la estrategia

En este sentido, se determinan los siguientes indicadores:

- Correspondencia entre las acciones propuestas y las exigencias requeridas para el fortalecimiento del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior.
- Rol de las acciones propuestas para el desarrollo del pensamiento lógico, investigativo e interpretativo de los estudiantes universitarios.
- Influencias de las acciones propuestas para el desarrollo del pensamiento reflexivo y tecnológico del estudiante.

10. Indicadores para la evaluación de las transformaciones deseadas en los estudiantes universitarios

Consecuentemente con las transformaciones deseadas en los estudiantes universitarios, se determinan los siguientes indicadores:

- Nivel de precisión en la selección de las alternativas de resolución de los problemas matemáticos, en correspondencia con las necesidades de aplicación y disponibilidad tecnológica.

- Grado de exactitud en la aplicación y argumentación de los métodos, procedimientos y técnicas seleccionadas para la resolución de los ejercicios y problemas matemáticos que se les presente.
- Nivel de profundidad en la valoración de los resultados de los ejercicios y problemas matemáticos, con relación a su aplicación práctica.
- Reconocimiento de las potencialidades y limitaciones que poseen en la resolución e interpretación de un determinado ejercicio o problema matemático.

11. Evaluación general de la estrategia

En la evaluación general de la presente estrategia, se incluyen aspectos tales como:

- Pertinencia del diagnóstico realizado.
- Cumplimiento del objetivo general de la estrategia.
- Cumplimiento de los objetivos específicos de cada uno de los subprocesos planteados.
- Efectividad de las acciones desarrolladas.
- Rol que desempeñan las acciones implementadas en el proceso de desarrollo del pensamiento lógico, interpretativo y tecnológico de los estudiantes universitarios.
- Correspondencia entre las acciones implementadas y las perspectivas de desarrollo del pensamiento lógico, interpretativo y tecnológico de los estudiantes universitarios.
- Facilidades de implementación de la estrategia y expectativas de la comunidad universitaria.
- Satisfacción de las necesidades específicas del contexto en que se extienda su aplicación.

12. Ejemplificación práctica de la estrategia

La ejemplificación práctica de la presente estrategia, se realizó en un tema de la asignatura Análisis Matemático 1, durante el curso 2013, con la participación de 40 estudiantes que constituyen la matrícula del curso regular diurno del primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática del ISCED-Huambo-Angola, por considerar esta una etapa de tránsito de la enseñanza pre-universitaria a la universitaria, donde se requiere que los estudiantes utilicen adecuadamente sus experiencias y conocimientos previos, con la intencionalidad de que estos evolucionen paulatinamente ante la necesidad de resolver e interpretar problemas concretos de la vida y de la profesión.

Según el programa elaborado por la Pro-Rectoría para la Reforma Curricular de la Universidad Agostinho Neto (2007), dirigido a los ISCED, la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático 1, tiene en cuenta aspectos tales como:

1. Comprensión de conceptos matemáticos.
2. Reglas de análisis matemático.
3. Desarrollo del razonamiento lógico de los estudiantes.
4. Fortalecimiento progresivo de la formación matemática.
5. Apropiación activa de conocimientos científicos.
6. Relación entre los contenidos programados y la vida real.
7. Profundización de la objetividad de los conocimientos del Análisis Matemático y su extensión a la resolución de problemas, en correspondencia con las necesidades de las demás asignaturas que integran el plan curricular.

Igualmente revela la necesidad de utilizar la bibliografía indicada y complementaria; combinar métodos, medios y técnicas en la resolución de problemas, así como comprobar e interpretar los resultados.

No obstante a los aspectos destacados en el programa referenciado, se propone la creación de espacios de intercambio que estimulen el desarrollo del pensamiento de los estudiantes en cuanto a: investigación científica y tecnológica, creatividad, uso racional de los recursos disponibles, responsabilidad, humildad científica, compromiso social y personal ante los retos del desarrollo de la educación matemática y socioeconómico de las distintas regiones del país.

Los aspectos antes mencionados, han sido especificados por las potencialidades formativas que brindan, por su contribución al desarrollo integral de la personalidad de los estudiantes; al estímulo de relaciones socio-afectivas, así como al razonamiento lógico ante la necesidad de encontrar la solución óptima a los problemas que se presentan tanto en la vida cotidiana, como profesional.

Consecuentemente con el programa de estudio de la asignatura seleccionada en la carrera de Licenciatura en Matemática del ISCED-Huambo-Angola, sustentado en el análisis epistemológico y metodológico del proceso que se aborda, la ejemplificación práctica de la estrategia, se centró en el estudio de Funciones y Derivadas.

En correspondencia con la estructura de la estrategia didáctica propuesta, se inició su aplicación mediante el diagnóstico del estado actual de la dinámica del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior.

Según diagnóstico realizado en el grupo de estudiantes seleccionados, fundamentado en las observaciones a clases, en el intercambio con profesores, así como en las encuestas a estudiantes y profesores, se pudo apreciar que existen en la asignatura Análisis Matemático 1:

- Limitaciones en la concepción de la resolución de problemas contextualizados, como impulso para el aprendizaje significativo de la Matemática.
- Inconsistencias en la resolución de problemas matemáticos que exigen combinación con los métodos abordados en los niveles precedentes.
- Insuficiente enfoque en los Asistentes Matemáticos y el rol que desempeñan en la resolución de problemas, representación gráfica de funciones, comprobación e interpretación de los resultados.
- Deficiente orientación en la valoración de los resultados de los ejercicios y problemas matemáticos planteados, en relación con las potencialidades de su aplicación práctica.

Después de esta breve caracterización, se procedió a materializar las orientaciones metodológicas generales para la instrumentación de la presente estrategia didáctica.

Inicialmente se realizó un análisis de los contenidos del programa y se estableció el orden de impartición para potenciar el estudio de Funciones y Derivadas tal como: funciones polinómicas y modulares, funciones racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, derivada de una función, significado geométrico, cálculo de la derivada mediante la definición y aplicación de reglas de derivación.

Posteriormente, se desarrollaron actividades metodológicas con el colectivo de profesores del primer año tales como:

- Taller sobre el rol de la Matemática en el desarrollo socioeconómico del país.
- Taller acerca del enfoque hermenéutico-dialéctico y el papel que desempeña en el fortalecimiento del proceso de formación matemática en la educación superior.
- Taller sobre la utilidad de los Asistentes Matemáticos en el proceso de resolución de problemas, comprobación, interpretación de los resultados, representación gráfica de funciones, así como el rol que desempeñan en la dinamización del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior.

Los resultados de las actividades antes mencionadas, permitieron solidificar la necesidad de seguir perfeccionando el proceso de formación interpretativa del contenido matemático en la educación superior, ya sea a través de la resolución de problemas donde se empleen procedimientos tradicionales, o mediante la incorporación de técnicas modernas de computo, dadas las potencialidades que brindan al desarrollo de habilidades lógicas de pensamiento matemático, en la optimización del tiempo de cálculo, en la comprobación e interpretación de los resultados, entre otras aplicaciones prácticas (Cuicas, Debel, Casadei y Álvarez, 2007).

Se procede a la planificación y ejecución de las acciones encaminadas al perfeccionamiento del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior, a través del estudio del tema enunciado con anterioridad. En este sentido, se programaron y realizaron charlas con los estudiantes sobre la importancia de la Matemática para la vida cotidiana y su transcendencia en la actividad profesional.

Para el desarrollo de las charlas se empleó el propio espacio de las clases de Análisis Matemático 1, lo que permitió incrementar la participación de los estudiantes y dinamizar cada vez más el proceso, además, se propició el debate, donde se integraron las experiencias aportadas por los estudiantes, ideas y ejemplos prácticos.

En este sentido, se planteó la siguiente cuestión al iniciar la primera conferencia del tema: ¿cuándo se utiliza un teléfono, una tarjeta de crédito, dispositivos electrónicos para navegar en Internet; calculadoras, computadoras; escucha un Disco Compacto, maneja un auto, coge un avión, barco o tren, es consciente que estos artefactos funcionan apoyados por la Matemática?

Esta actividad fue significativa para los estudiantes, visualizada en la reacción demostrada, fundamentalmente cuando auto-valoraron su nivel de conciencia sobre estos y demás aspectos concretos de la realidad circundante, donde la Matemática, explícita o implícitamente, funciona como una herramienta potente en su desarrollo técnico o científico. En general, en el desarrollo de las conferencias del tema, a través de situaciones similares se relaciona el concepto de función y de derivada con su significación práctica, lo que posibilita la contextualización de los contenidos, partiendo para ambos casos, de las experiencias y conocimientos apropiados en la enseñanza precedente.

En el desarrollo de las clases prácticas, se establece un sistema organizado de manera tal que favorezca la sistematización, se seleccionaron ejercicios rutinarios, donde paulatinamente se fue aumentando los grados de dificultades.

Los problemas de aplicación práctica, se plantearon al final, para permitir a los estudiantes adquirir confianza en las operaciones matemáticas y las nuevas ideas, antes de tratar cuestiones que requieren del análisis de situaciones concretas de la vida real.

De esta forma, los autores consideran que se logra elevar el nivel de participación de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas matemáticos, en la comprobación e interpretación de los resultados; se incrementa la visibilidad del rol de la Matemática y su transcendencia en la resolución de problemas de otros campos del saber.

Consecuentemente con lo antes planteado, un primer ejercicio fue encontrar la primera y segunda derivada de la siguiente función:

$$f(x) = x^2 + 2x + \ln(x) + 4$$

En función de lograr mayor participación de los estudiantes en el proceso de derivación, se partió de un análisis grupal (estudiantes y profesor) en cuanto a la estructura matemática de la función en cuestión, lo que contribuyó a facilitar la selección de los procedimientos a emplear para encontrar la primera derivada.

El 100% de los estudiantes argumentó que la función está compuesta por la suma de cuatro funciones, es decir, una función polinómica de segundo grado, una lineal, una logarítmica y una función constante.

Posteriormente se les preguntó: ¿Qué regla se debe aplicar para hallar la derivada de la función planteada? ¿Explique por qué? Los estudiantes respondieron que se deben aplicar las reglas de derivación estudiadas para cada caso en aras de encontrar la correspondiente solución.

$$f(x) = x^2 + 2x + \ln(x) + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x^{2-1} + 2(1) + \frac{1}{x} + 0 = 2x + 2 + \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} + 2$$

Encontrada la primera derivada de la función indicada, se les pidió a los estudiantes que calcularan la segunda derivada basándose en los procedimientos empleados en el caso anterior. Después de analizada la estructura de la primera derivada, algunos estudiantes se percataron de la necesidad de integrar la regla del cociente en el proceso de derivación, tal como se demuestra a continuación:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} + 2$$

$$f''(x) = 2(1) + \frac{0 \times (x) - 1 \times (1)}{x^2} + 0 = 2 + \frac{0 - 1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$$

Otros estudiantes propusieron calcular la derivada en cuestión, a través de la transformación del cociente en potencia.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x + x^{-1} + 2$$

$$f''(x) = 2(1) - x^{-1-1} + 0 = 2 - x^{-2} = 2 - \frac{1}{x^2}$$

La propuesta de diferentes alternativas de resolución propició el debate, la confrontación de ideas, la socialización de métodos, por lo que ambas respuestas fueron intencionalmente utilizadas.

Al comprobarse la efectividad de los procedimientos empleados en ambos casos, el 100% de los estudiantes se percató de la importancia de la combinación de métodos y técnicas en la búsqueda de la solución correspondiente a un determinado ejercicio o problema matemático, espacio aprovechado para ampliar la explicación del rol que desempeña la combinación de métodos y técnicas, la socialización de procedimientos, así como la comprobación de los resultados como parte de la resolución de problemas matemáticos y alternativa potente para el desarrollo del pensamiento lógico.

Con posterioridad, se planteó el ejercicio que se presenta a continuación:

Dada la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$, encontrar el valor de la pendiente en el punto $x_0 = 3$.

Para encontrar el valor de la pendiente en el punto indicado, se empleó el siguiente procedimiento:

- Calcular la derivada de la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$.

Mediante las reglas de derivación ya empleadas en los casos anteriores se calculó la derivada de la función indicada, esto es:

$$f'(x) = 3x^{3-1} + 2(1) + 0 = 3x^2 + 2$$

- Sustituir el valor de $x_0 = 3$ en la derivada calculada, para encontrar el valor de la pendiente, o sea:

$$f'(x_0) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(3) = 3 \times (3)^2 + 2 = 3 \times 9 + 2 = 29$$

A continuación se les pidió a los estudiantes que calcularan la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto dado, con el propósito de estimular la integración de conocimientos precedentes en la resolución de situaciones que se puedan presentar en el desarrollo de un determinado ejercicio o problema matemático.

A partir del valor de x_0 se determinó el valor de y , utilizando para ello la función original, es decir:

$$\begin{aligned}y &= f(x_0) = x^3 + 2x + 4 \\y &= f(3) = (3)^3 + 2 \times (3) + 4 \\y &= 27 + 6 + 4 \\y &= 37\end{aligned}$$

Expresando en forma de coordenadas cartesianas, se obtuvo el punto $P(x, y) = (3, 37)$, el cual permitió calcular y trazar la ecuación de la recta que pasa por un punto con pendiente dada, es decir, $y = mx + n$.

En la observación y análisis de la ecuación anterior, los estudiantes se percataron que el punto $P(x, y) = (3, 37)$, unido al valor de la pendiente, ($m = 29$) favorece la determinación del valor de n mediante la realización de operaciones ya estudiadas en la enseñanza precedente, esto es, sustituyendo los referidos valores en la ecuación de la recta como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned}y &= mx + n \\37 &= 29 \times 3 + n \\37 &= 87 + n \\n &= 37 - 87 \\n &= -50\end{aligned}$$

Después de haber calculado el valor de n , se substituyó este y el de la pendiente calculada anteriormente, en la ecuación $y = mx + n$ para determinar la recta tangente a la curva en el punto dado, esto es: $y = 29x - 50$.

En la resolución de los ejercicios anteriores, se observaron imprecisiones en los procedimientos a emplear, ya sea en el cálculo de las derivadas, como para determinar la ecuación de la recta que pasa por un punto con pendiente dada. Estas deficiencias, unidas a las exigencias requeridas para el perfeccionamiento continuo del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior, revelan la necesidad de incluir dentro del sistema de clases, el tratamiento de problemas contextualizados, gradados de lo simple a lo

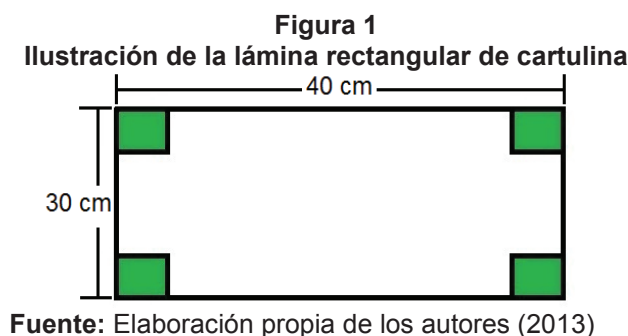
complejo, para que los estudiantes desarrollen una forma de pensamiento, que les permita ver la Matemática como una ciencia útil, atractiva y fundamental en la resolución de problemas concretos de la vida y de distintas ramas del saber.

En este sentido, se planteó el siguiente problema:

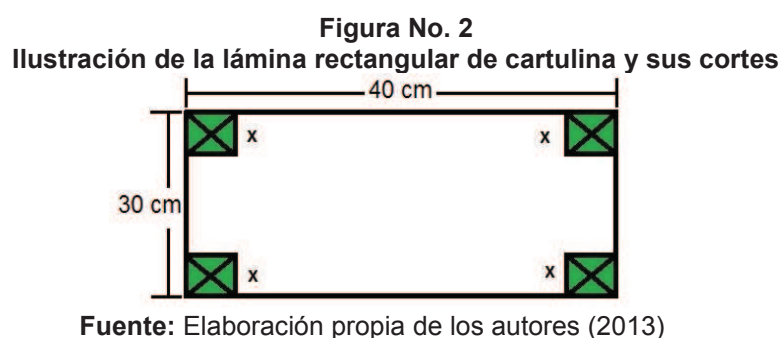
De una lámina rectangular de cartulina ($40\text{ cm} \times 30\text{ cm}$), se cortan de cada esquina, un cuadrado. Determine el valor de las dimensiones de los lados del cuadrado para que se pueda fabricar con el resto una caja abierta de capacidad máxima.

Para la resolución del problema enunciado, se empleó el siguiente procedimiento:

- Explicar la significación práctica del problema a los estudiantes con el propósito de facilitar la comprensión del mismo.
- Representar gráficamente el problema, (Figura 1).



- Representar a cada uno de los lados del cuadrado con una variable determinada (x), (Figura 2).



- Buscar fórmulas que relacionen las cantidades conocidas y las desconocidas.
- Formar una ecuación que relacione la incógnita seleccionada (x) con las cantidades desconocidas.
- Analizar las alternativas que facilitan la solución de la ecuación formada.

- Resolver la ecuación obtenida y hallar el valor correspondiente a la incógnita.
- Comprobar e interpretar los resultados en términos del problema original.

El análisis y la interpretación de las dimensiones de la cartulina, conllevaron a la siguiente expresión matemática: $(40-2x) \text{ cm}$ (largo); $(30-2x) \text{ cm}$ (ancho), donde la altura (h) equivale al corte de las esquinas, es decir, $x \text{ cm}$.

Posteriormente, se intercambiaron con los estudiantes ideas que facilitan la comprensión de la significación práctica de la capacidad máxima que se expresa en el problema planteado, para que ellos pudieran emitir criterios propios o colectivos, así como aportar procedimientos y fórmulas que permitan calcular dicha capacidad con las dimensiones indicadas, recurriendo para ello, a los conocimientos apropiados en los niveles precedentes.

Esta actividad permitió apreciar las habilidades de razonamiento lógico que poseen los estudiantes en cuanto a la aplicación de conocimientos de la enseñanza precedente en la resolución de problemas que se puedan presentar en determinados entornos sociales.

En correspondencia con el intercambio realizado, el análisis participativo y contextualizado de la situación problémica planteada, así como de su representación gráfica, los estudiantes coincidieron que la fórmula adecuada para fabricar la caja abierta de capacidad máxima, acorde con los requerimientos del problema, es $V = l \times a \times h$, o sea, la del volumen de un ortoedro de base rectangular.

Al sustituir los datos emergentes de la interpretación gráfica del problema en la fórmula seleccionada se obtuvo:

$$V = [(40-2x)(30-2x)x] \text{ cm}^3$$

$$V = [(1200-80x-60x+4x^2)x] \text{ cm}^3$$

$$V = (1200x-140x^2+4x^3) \text{ cm}^3$$

La última expresión, representa la función objetivo, y en aras de facilitar su derivación, se asignó hipotéticamente $f(x) = V = (4x^3-140x^2+1200x) \text{ cm}^3$, donde $f'(x) = (12x^2-280x+1200) \text{ cm}$ corresponde a la primera derivada. Igualando a cero esta y multiplicando ambos miembros de la ecuación por un cuarto, $\left[\frac{1}{4}\right]$ se obtiene:

$$(12x^2 - 280x + 1200) \text{ cm} = 0 \quad \left[\frac{1}{4} \right]$$

$$(3x^2 - 70x + 300) \text{ cm} = 0$$

Posteriormente, se les pidió a los estudiantes que identificaran la ecuación recién transformada, recurriendo para ello, a los conocimientos apropiados en la enseñanza precedente y revelar con claridad la vía a utilizar para su solución. Unánimemente contestaron que es una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve aplicando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{donde } a = 3 \text{ cm}, \quad b = -70 \text{ cm} \quad \text{y} \quad c = 300 \text{ cm}$$

$$x_{1,2} = \frac{70 \text{ cm} \pm \left[\sqrt{4900 - 3600} \right] \text{ cm}}{6 \text{ cm}} \quad x_1 \approx \left[\frac{106,055}{6} \right] \text{ cm}$$

$$x_{1,2} = \frac{70 \text{ cm} \pm \left[\sqrt{1300} \right] \text{ cm}}{6 \text{ cm}} \quad x_1 \approx 17,675 \text{ cm}$$

$$x_1 = \left[\frac{70 + \sqrt{1300}}{6} \right] \text{ cm} \quad x_2 \approx \left[\frac{70 - 36,055}{6} \right] \text{ cm}$$

$$x_1 \approx \left[\frac{70 + 36,055}{6} \right] \text{ cm} \quad x_2 \approx \left[\frac{33,945}{6} \right] \text{ cm}$$

$$x_2 \approx 5,657 \text{ cm}$$

Al intercambiar con los estudiantes sobre la significación práctica de las soluciones encontradas y considerando, que solo una de ellas satisface los requerimientos del problema en cuestión, se les pidió que argumenten este planteamiento.

El 60% de los estudiantes (24) argumentó, que como ambas soluciones son positivas, el valor $x_1 \approx 17,675 \text{ cm}$, representa la dimensión de los lados del cuadrado que posibilita obtener la capacidad máxima de la caja (sin tener en cuenta la limitante $(30 - 2x) \text{ cm}$). Sin embargo, el 40% de los estudiantes (16) expresó sus argumentos, partiendo de que: al sustituir $x_1 \approx 17,675 \text{ cm}$ en la expresión $(30 - 2x) \text{ cm}$, conduciría a un valor negativo $(-5,35) \text{ cm}$, transformando de esta forma, una de las dimensiones de la cartulina original (ancho).

La divergencia de criterios producida por este análisis, condujo al debate científico, al fortalecimiento de los argumentos empleados en la justificación de las soluciones encontradas, así como al análisis y la comprobación de ambas expresiones mediante la

sustitución de los valores correspondientes a x_1 y a x_2 , los cuales permitieron demostrar que $x_1 \approx 17,675 \text{ cm}$, no es la solución óptima al problema planteado.

Después de analizados los criterios emitidos y llegado al consenso de que son más coherentes los argumentos presentados por el 40% de los estudiantes, se pidió al grupo completo, que argumentaran la significación práctica de $x_2 \approx 5,657 \text{ cm}$.

Como resultado de la socialización de criterios, técnicas y procedimientos, fundamentales para el perfeccionamiento del proceso de formación interpretativa en la Matemática Superior, el 100% de los estudiantes confirmó, que para fabricar la caja de capacidad máxima, se debe recortar un cuadrado, cuyos lados miden aproximadamente $5,657 \text{ cm}$.

Esta acción, contribuyó al fortalecimiento de sus argumentos, la apropiación de otros nuevos, así como la comprensión de los nexos existentes entre la teoría, la práctica y el contexto social. Contribuyó además, a revelar la necesidad de seguir elevando los niveles de contextualización de los ejercicios y problemas matemáticos abordados, ya sean en clases prácticas, como en actividades extra-clases, de modo que se estimule el desarrollo de nuevas habilidades lógicas de pensamiento matemático.

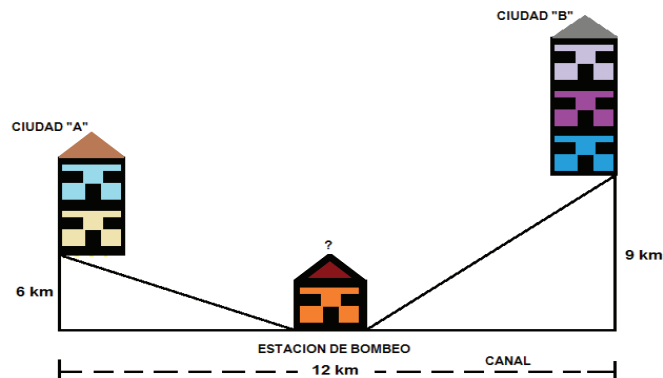
En aras de seguir equilibrando los niveles de comprensión de los estudiantes, los niveles de análisis, de interpretación y de argumentación de los resultados; facilitar la apropiación de los métodos y procedimientos empleados en la resolución de un determinado ejercicio o problema matemático; revelar la necesidad del uso adecuado de las unidades de medida en correspondencia con los requerimientos de los ejercicios o problemas planteados; estimular el desarrollo de nuevas habilidades de pensamiento matemático ante la necesidad de transformación de la realidad circundante, socioeconómica, así como revelar el rol que desempeña la Matemática en estos procesos, se planteó el siguiente problema:

En la República de Angola, las ciudades de Caála (A) y Huambo (B), están situadas al norte de un canal que corre en línea recta, aproximadamente de 6 a 9 kilómetros de este. Ambas deben obtener su provisión de agua de una misma estación de bombeo. ¿En qué punto de la orilla del canal debería construirse la estación, para que se use la menor cantidad de tubería posible, una vez que los puntos más cercanos del canal a las ciudades A y B, están a 12 kilómetros de distancia?

Para la resolución de este problema, se empleó el siguiente procedimiento:

- Explicar la significación práctica del problema a los estudiantes con el propósito de facilitar la comprensión del mismo.
- Representar gráficamente el problema, (Figura 3).

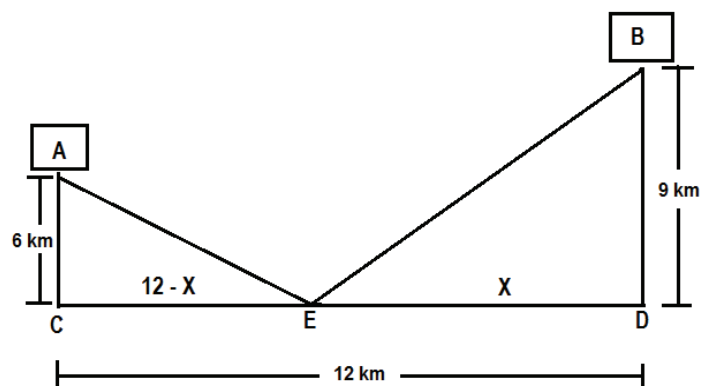
Figura 3
Ilustración de las dos ciudades, la estación de bombeo y el canal



Fuente: Elaboración propia de los autores (2013)

- Centrar la atención de los estudiantes en la incógnita (x), es decir, enfocarse en la formulación de la estructura algebraica que define la función objetivo, y analizarla desde diferentes perspectivas (cambiando la posición de la incógnita (x), de modo que se obtenga una variación de la función objetivo), (Figura 4).

Figura 4
Ilustración de la interpretación matemática de las dos ciudades, la estación de bombeo y el canal



Fuente: Elaboración propia de los autores (2013)

- Buscar fórmulas que relacionen las cantidades conocidas y las desconocidas.
- Formar una ecuación que relacione la incógnita seleccionada (x) con las cantidades desconocidas.
- Analizar las alternativas que facilitan la solución de la ecuación formada.
- Resolver la ecuación obtenida y hallar el valor correspondiente a la incógnita.
- Comprobar e interpretar los resultados en términos del problema original.

El análisis y la interpretación del problema permitieron seleccionar el teorema de Pitágoras como alternativa de resolución del mismo tal como se presenta a continuación:

$$AE = \left[\sqrt{(6)^2 + (12 - x)^2} \right] km$$

$$BE = \left[\sqrt{(9)^2 + (x)^2} \right] km$$

$$AEB = AE \text{ km} + BE \text{ km}$$

$$AEB = \left[\sqrt{36 + 144 - 24x + x^2} \right] km + \left[\sqrt{81 + x^2} \right] km$$

$$AEB = \left[\sqrt{x^2 - 24x + 180} \right] km + \left[\sqrt{x^2 + 81} \right] km$$

Como se puede observar, el segmento $AEB \text{ km}$ representa la función objetivo del problema, y para su derivación, se asignó hipotéticamente $g(x) = AEB \text{ km}$, es decir:

$$g(x) = \left[\sqrt{x^2 - 24x + 180} \right] km + \left[\sqrt{x^2 + 81} \right] km$$

$$g'(x) = \left[\frac{2x^{2-1} - 24(1) + 0}{2\sqrt{x^2 - 24x + 180}} \right] km + \left[\frac{2x^{2-1} + 0}{2\sqrt{x^2 + 81}} \right] km$$

$$g'(x) = \left[\frac{2x - 24}{2\sqrt{x^2 - 24x + 180}} \right] km + \left[\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 81}} \right] km$$

$$g'(x) = \left[\frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 180}} \right] km + \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 81}} \right] km$$

Igualando a cero la primera derivada y aplicando transformaciones algebraicas se obtiene:

$$\left[\frac{x-12}{\sqrt{x^2-24x+180}} \right] km + \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+81}} \right] km = 0$$

$$\left[\frac{x-12}{\sqrt{x^2-24x+180}} \right] km = \left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+81}} \right] km$$

$$\left[\frac{x-12}{\sqrt{x^2-24x+180}} \right]^2 km = \left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+81}} \right]^2 km$$

$$\left[\frac{x^2-24x+144}{x^2-24x+180} \right] km = \left[\frac{x^2}{x^2+81} \right] km$$

$$(x^4 + 81x^2 - 24x^3 - 1944x + 144x^2 + 11664) km = (x^4 - 24x^3 + 180x^2) km$$

$$(45x^2 - 1944x + 11664) km = 0 \left[\frac{1}{9} \right]$$

$$(5x^2 - 216x + 1296) km = 0$$

Basados en los fundamentos y procedimientos empleados en el caso anterior, se procedió a la resolución de la ecuación $(5x^2 - 216x + 1296) km = 0$, aplicando para ello, la fórmula general.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{donde } a = 5 \text{ km}, \quad b = -216 \text{ km} \quad y \quad c = 1296 \text{ km}$$

$$x_{1,2} = \frac{216 \text{ km} \pm \left[\sqrt{46656 - 25920} \right] \text{ km}}{10 \text{ km}} \quad x_1 = 36 \text{ km}$$

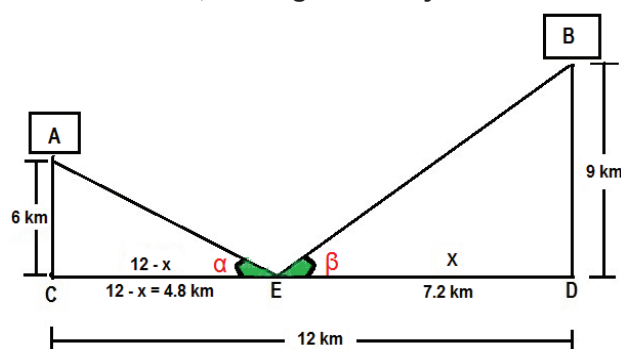
$$x_{1,2} = \frac{216 \text{ km} \pm \left[\sqrt{20736} \right] \text{ km}}{10 \text{ km}} \quad x_2 = \left[\frac{216 - 144}{10} \right] \text{ km}$$

$$x_1 = \left[\frac{216 + 144}{10} \right] \text{ km} \quad x_2 = 7.2 \text{ km}$$

Encontradas las soluciones, se intercambiaron criterios y argumentos entorno a su significación práctica, acción que permitió comprobar que la solución $x_1 = 36 \text{ km}$. no se corresponde con la naturaleza del problema.

Como detalle interesante, se calcularon los ángulos alfa (α) y beta (β), aplicando para ello, las definiciones trigonométricas, siendo la función tangente, la que permitió efectuar dicho cálculo, en correspondencia con la información que se brinda en la Figura 5.

Figura 5
Ilustración de la interpretación matemática de las dos ciudades, la estación de bombeo, el canal, los ángulos alfa y beta



Fuente: Elaboración propia de los autores (2013)

$$\tan(\alpha) = \frac{6}{4.8} = 1.25^\circ$$

$$\tan(\beta) = \frac{9}{7.2} = 1.25^\circ$$

Consecuentemente con el análisis y la interpretación de la naturaleza del problema en cuestión, así como para la determinación de los ángulos mencionados, es decir, en grados, se han emitido criterios que evidencian que la omisión (al menos explícita) de las unidades de medida, no alteran los resultados, aspecto que posibilitó su declaración en la solución final. Además, se explicó a los estudiantes la existencia de artefactos tecnológicos que posibilitan la conversión directa de determinadas unidades de medida a otras, para la determinación de ángulos: Teodolito, Software, entre otros.

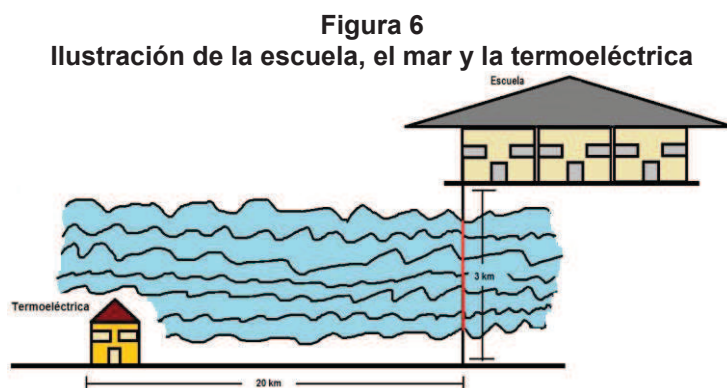
Como se puede apreciar, los ángulos alfa (α) y beta (β) son iguales, lo que evidencia que la distancia es mínima en el punto E , de otra manera, las distancias halladas no serían las óptimas.

Después de analizados los procedimientos empleados en la resolución de los casos anteriores, cuya intención es seguir elevando los niveles de contextualización, se planteó otra situación problémica que requiere un esfuerzo intelectual de los estudiantes en cuanto a: abstracción, interpretación y argumentación.

En una Isla de la ciudad de Luanda, Angola, se encuentra situada una escuela primaria. Se necesita tender una línea eléctrica para llevar electricidad a dicha escuela desde una termoeléctrica que se sitúa a 20 km. del punto más cercano a esta, es decir, 3 km. El costo de instalación en tierra, es de 15 000,00 Kz. (kwanzas, moneda nacional de Angola) y 25 000,00 Kz. por mar. Determine el recorrido óptimo de la línea, para calcular su costo mínimo de instalación.

Para la resolución del problema enunciado, se empleó el siguiente procedimiento:

- Explicar la significación práctica del problema a los estudiantes con el propósito de facilitar la comprensión del mismo.
- Representar gráficamente el problema, (Figura 6).

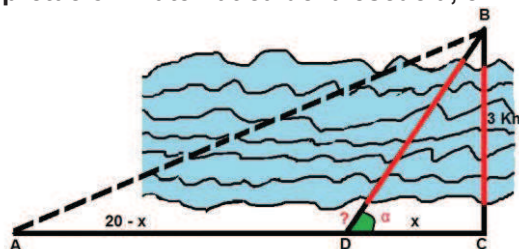


Fuente: Elaboración propia de los autores (2013)

- Buscar fórmulas que relacionen las cantidades conocidas y las desconocidas.
- Formar una ecuación que relacione la incógnita seleccionada (x) con las cantidades desconocidas.
- Analizar las alternativas que facilitan la solución de la ecuación formada.
- Resolver la ecuación obtenida y hallar el valor correspondiente a la incógnita.
- Comprobar e interpretar los resultados en términos del problema original.

Dada la necesidad de determinar el recorrido óptimo de la línea, o sea, distribuir las distancias por mar y por tierra, de modo que se obtenga el costo mínimo de instalación, se recurrió una vez más, a los procedimientos pitagóricos, tal como se demuestra en la Figura 8.

Figura 8
Ilustración de la interpretación matemática de la escuela, el mar y la termoeléctrica



Fuente: Elaboración propia de los autores (2013)

$$AD = (15.000)kz(20 - x)km$$

$$DB = (25.000)kz(\sqrt{x^2 + 3^2})km$$

$$ADB = (15.000)kz(20 - x)km + (25.000)kz(\sqrt{x^2 + 3^2})km$$

$$ADB = (300.000 - 15.000x)kz / km + \left[25.000(\sqrt{x^2 + 9}) \right]kz / km$$

Como se observa, el segmento $ADB = \left[300.000 - 15.000x + 25.000\sqrt{x^2 + 9} \right]kz / km$

representa la función objetivo del problema. Para su derivación, se asignó hipotéticamente $h(x) = ADB$, es decir:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \left[300.000 - 15.000x + 25.000\sqrt{x^2 + 9} \right] \text{ kz / km} \\
 h'(x) &= \left[0 - 15.000(1) + 25.000 \frac{2x^{2-1} + 0}{2\sqrt{x^2 + 9}} \right] \text{ kz / km} \\
 h'(x) &= \left[-15.000 + 25.000 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} \right] \text{ kz / km} \\
 h'(x) &= \left[-15.000 + 25.000 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right] \text{ kz / km} \\
 h'(x) &= \left[\frac{25.000x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 15.000 \right] \text{ kz / km}
 \end{aligned}$$

Igualando a cero la primera derivada y aplicando transformaciones algebraicas se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{25.000x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 15.000 \right] \text{ kz / km} &= 0 \\
 \left[\frac{25.000x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right] \text{ kz / km} &= 15.000 \text{ kz / km} \\
 \left[\frac{25.000x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right]^2 \text{ kz / km} &= [15.000]^2 \text{ kz / km} \\
 \left[\frac{625.000.000x^2}{x^2 + 9} \right] \text{ kz / km} &= (225.000.000) \text{ kz / km} \\
 (625.000.000x^2) \text{ kz / km} &= (225.000.000x^2 + 2.025.000.000) \text{ kz / km} \\
 (400.000.000x^2 - 2.025.000.000) \text{ kz / km} &= 0 \left[\frac{1}{50.000.000} \right] \text{ kz / km} \\
 (8x^2 - 40.5) \text{ kz / km} &= 0 \\
 (8x^2) \text{ kz / km} &= (40.5) \text{ kz / km} \\
 x_1 &= 2.25 \text{ kz / km} \\
 x_2 &= -2.25 \text{ kz / km}
 \end{aligned}$$

Como se observa, se han obtenido dos soluciones, que después de haber socializado su significación práctica acorde a las necesidades declaradas en el problema, se ha tomado la solución positiva ($x_1 = 2.25 \text{ kz / km}$), pues la negativa ($x_2 = -2.25 \text{ kz / km}$) carece de sentido, porque el mismo trata del concepto de distancia. En esta actividad, no solo se valoró la capacidad argumentativa de los estudiantes, sino el análisis y la interpretación de la

naturaleza de los problemas o fenómenos en estudio, para fortalecer la comprensión de los estudiantes; contribuir al desarrollo de su pensamiento lógico, reflexivo, así como desarrollar habilidades comunicativas que les permita emitir valoraciones en torno a la optimización interpretativa de los resultados.

Para la determinación del ángulo que posibilita calcular el costo mínimo de la obra, según las disponibilidades del problema en cuestión, se recorrió a los criterios y procedimientos empleados para la solución del problema anterior. En este sentido, se ha tomado $x_1 = 2.25$ y mediante el empleo del Software Mathcad 2001 Professional, se logró la determinación del ángulo que determina la distancia mínima por mar (DB), es decir,

$$\alpha = a \tan \left[\frac{3}{2.25} \right], \text{ siendo } \alpha = 53^\circ.13'.$$

Consecuentemente con los criterios y procedimientos mencionados, así como el sistema de relaciones que se pone de manifiesto entre x_1 y x_{Min} , (Min, Mínimo) se substituyó este ($x_1 = x_{Min} = 2.25$) en la función objetivo para calcular el costo mínimo de la obra en *kz.* como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned} ADB &= 300.000 - 15.000x + 25.000(\sqrt{x^2 + 9}) \\ h(x_{Min}) &= 300.000 - 150.00(2.25) + 25.000 \left[\sqrt{(2.25)^2 + 9} \right] \\ h(x_{Min}) &= 300.000 - 33.750 + 25.000(\sqrt{5.0625 + 9}) \\ h(x_{Min}) &= 300.000 - 33.750 + 25.000(\sqrt{14.0625}) \\ h(x_{Min}) &= 266.250 + 25.000(3.75) \\ h(x_{Min}) &= 266.250 + 93.750 \\ h(x_{Min}) &= 360\,000,00 \text{ Kz.} \end{aligned}$$

Al terminar el cálculo del costo mínimo de la obra según las disponibilidades asignadas, es decir, la suma equivalente a 360 000,00 *Kz.* se aprovechó el espacio para intercambiar con los estudiantes, aspectos relacionados con la necesidad del manejo adecuado de los recursos públicos. Se generalizó la interpretación de este problema para analizar situaciones que ocurren en distintos sectores socioeconómicos de la República de Angola, así como en la vida cotidiana de los ciudadanos debido a una insuficiente gestión de los bienes y servicios.

Se orientaron problemas similares, para el trabajo independiente de los estudiantes, a partir del reconocimiento de las semejanzas analíticas e interpretativas con los anteriores, para que se desempeñen como constructores de su propio conocimiento y proceso de aprendizaje.

Uno de los problemas orientados es el siguiente:

Se necesita construir un tanque cilíndrico, sin tapa, en posición vertical en las proximidades del súper mercado "**Nosso Super**" en la ciudad de Benguela, Angola. El mismo debe poseer una capacidad de $100m^3$. Determine sus dimensiones para que el material a utilizar en su construcción, sea el mínimo.

En el proceso de resolución de este problema los estudiantes utilizaron símbolos y figuras que facilitaron la comprensión y la interpretación de los datos. Demostraron el empleo de un lenguaje matemático preciso en la justificación y en la argumentación de la alternativa de solución seleccionada. Al finalizar se socializaron, mediante técnicas de confrontación de ideas, las alternativas de solución, así como los resultados encontrados, lo que contribuyó a fortalecer los procedimientos de análisis y de interpretación de estos.

A medida que se avanzó en el estudio del tema, desde su sistema de clases, los problemas contextualizados abordados, estuvieron intencionados a promover el aprendizaje significativo, las necesidades investigativas y la transcendencia de la Matemática en la sociedad.

Al finalizar la ejemplificación práctica, se intercambiaron distintos puntos de vista y criterios con el colectivo de profesores, sobre la necesidad de seguir elevando los niveles de contextualización de los contenidos, ejercicios y problemas matemáticos abordados en clases, mediante situaciones concretas del entorno en que se desarrollan los estudiantes y profesores.