Anexo: deducción de las soluciones constantes

De la primera ecuación del sistema algebraico (2)

$$\Delta_1 - \beta_1(1-u_1)x_1y_2 - \mu x_1 = 0,$$

se despeja x_1:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\beta_1(1-u_1)y_2 + \mu}. \tag{4}$$

Se reemplaza en la segunda ecuación del sistema algebraico (2),

$$\beta_1(1-u_1)x_1y_2 - \delta_1 x_2 = 0.$$

El valor obtenido en (4) y despejando x_2, se tiene:

$$x_2 = \frac{\beta_1(1-u_1)\Delta_1}{\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2 + \mu)}y_2. \tag{5}$$

Reemplazando (5) en la tercera ecuación del sistema algebraico (2),

$$\gamma_1 x_2 - \delta_2 x_3 = 0,$$

de donde x_3 es igual a

$$x_3 = \frac{\gamma_1\beta_1(1-u_1)\Delta_1}{\delta_2\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2 + \mu)}y_2. \tag{6}$$

Reemplazando en la cuarta ecuación del sistema algebraico (2) a (5),

$$\Delta_2 - \beta_2(1-u_1)x_2y_1 - \beta_3(1-u_2)y_1y_2 - \mu y_1 = 0,$$

se tiene y_1

$$y_1 = \frac{\Delta_2}{\frac{\beta_1\beta_2(1-u_1)^2\Delta_1 y_2}{\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)} + \beta_3(1-u_2)y_2 + \mu}. \tag{7}$$

Despejando y_3 de la última ecuación del sistema algebraico (2)

$$y_3 = \frac{\delta_2}{\gamma_2}y_2, \tag{8}$$

y reemplazando en la quinta ecuación del sistema algebraico (2) a (5) y a (7), se tiene:

$$\beta_2(1-u_1)\left(\frac{\beta_1(1-u_1)\Delta_1}{\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)}y_2\right)\left(\frac{\Delta_2}{\frac{\beta_1\beta_2(1-u_1)^2\Delta_1 y_2}{\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)}+\beta_3(1-u_2)y_2+\mu}\right)$$

$$+\beta_3(1-u_2)\left(\frac{\Delta_2}{\frac{\beta_1\beta_2(1-u_1)^2\Delta_1 y_2}{\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)}+\beta_3(1-u_2)y_2+\mu}\right)y_2-\delta_3 y_2=0.$$

Factorizando y_2,

$$\left[\frac{\beta_1\beta_2(1-u_1)^2\Delta_1\Delta_2}{\beta_1\beta_2(1-u_1)^2\Delta_1 y_2+\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)(\beta_3(1-u_2)y_2+\mu)}+\right.$$

$$\left.\frac{\beta_3(1-u_2)\Delta_2\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)}{\beta_2\beta_1(1-u_1)^2\Delta_1 y_2+\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)(\beta_3(1-u_2)y_2+\mu)}-\delta_3\right]y_2=0,$$

por lo tanto

$$y_2=0 \tag{9}$$

ó

$$\frac{\beta_2\beta_1(1-u_1)^2\Delta_1\Delta_2+\beta_3(1-u_2)\Delta_2\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)}{\beta_1\beta_2(1-u_1)^2\Delta_1 y_2+\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)(\beta_3(1-u_2)y_2+\mu)}-\delta_3=0. \tag{10}$$

Si $y_2=0$ se tiene lo siguiente:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\mu},\;\; x_2=0,\;\; x_3=0,\;\; y_1=\frac{\Delta_2}{\mu}, y_2=0, y_3=0.$$

Así, el punto trivial del sistema $E_0=\left(\frac{\Delta_1}{\mu},0,0,\frac{\Delta_2}{\mu},0,0\right)$ y corresponde al estado libre de infección. En el otro caso, simplificando (10) se tiene

$$\begin{aligned}
&-\delta_1\delta_3\beta_1(1-u_1)\beta_3(1-u_2)y_2^2-\left(\left[\frac{\beta_1(1-u_1)\Delta_1}{\delta_1\mu}+1\right]\beta_3(1-u_2)\right.\\
&\left.-\left[\frac{\beta_3(1-u_2)\Delta_2}{\delta_3\mu}-1\right]\beta_1(1-u_1)\right)\delta_1\delta_3\mu y_2\\
&+\delta_1\delta_3\mu\left(\frac{\beta_1\beta_2(1-u_1)^2\Delta_1\Delta_2}{\delta_3\delta_1\mu^2}+\frac{\beta_3(1-u_2)\Delta_2}{\delta_3\mu}-1\right)=0.
\end{aligned}$$

Sean

$$
\begin{aligned}
R_h(u_1) &= \tfrac{\beta_2(1-u_1)\Delta_1}{\delta_3\mu} \quad R_m(u_1) = \tfrac{\beta_1(1-u_1)\Delta_1}{\delta_1\mu} \\
R_g(u_2) &= \tfrac{\beta_3(1-u_2)\Delta_2}{\delta_3\mu} \quad R_0(u_1) = R_h(u_1)R_m(u_1) + R_g(u_2).
\end{aligned}
$$

entonces la anterior ecuación queda:

$$
\begin{aligned}
-\delta_1\delta_3\beta_1(1-u_1)\beta_3(1-u_2)y_2^2 - (R_g - 1)\left(\frac{(R_m+1)\beta_3(1-u_2)}{(R_g-1)\beta_1(1-u_1)} - 1\right) \\
\beta_1(1-u_1)y_2 + (R_0 - 1) = 0,
\end{aligned}
$$

que corresponde a una ecuación cuadrática de la forma:

$$
-p_2y_2^2 - p_1y_2 + p_0 = 0, \tag{11}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \beta_1(1-u_1)\beta_3(1-u_2) \\
p_1 &= (R_g - 1)\beta_1(1-u_1)\left[\frac{(R_m+1)\beta_3(1-u_2)}{(R_g-1)\beta_1(1-u_1)} - 1\right] \\
p_0 &= (R_0 - 1).
\end{aligned}
$$

Puede verse que si'la ecuación 3:

$$
R_g > 1 \quad \text{y} \quad \frac{(R_m+1)\beta_3(1-u_2)}{(R_g-1)\beta_1(1-u_1)} > 1, \tag{12}
$$

se garantiza que el coeficiente del término lineal es negativo. Del mismo modo, si $R_0 > 1$ el coeficiente p_0 es positivo la ecuación (11) tiene soluciones de la forma:

$$
y_2^{\pm} = -\frac{p_1}{2p_2} \pm \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2p_0}}{-2p_2} \in \mathbb{R},
$$

de donde

$$
y_2^{+} = -\frac{p_1}{2p_2} + \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2p_0}}{2p_2}, \qquad y_2^{-} = -\frac{p_1}{2p_2} - \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2p_0}}{2p_2}.
$$

Luego, $y_2^- < 0$ y cuando $\beta_1(1-u_1)\beta_3(1-u_2)(R_0-1) > 0$ entonces $y_2^+ > 0$; por lo tanto $y_2^+ \in \Omega$ si y sólo si $R_0 > 1$.

Ahora, con $R_0 > 1$ y las condiciones dadas en (3) se obtiene finalmente el punto de equilibrio no trivial $E_1 = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$, donde

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= \frac{\Delta_1}{\beta_1(1-u_1)y_2+\mu} > 0 \\
\overline{x}_2 &= \frac{\beta_1(1-u_1)\Delta_1}{\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)} y_2 > 0 \\
\overline{x}_3 &= \frac{\gamma_1\beta_1(1-u_1)\Delta_1}{\delta_1\delta_2(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)} y_2 > 0 \\
\overline{y}_1 &= \frac{\Delta_2\delta_1(\beta_1(1-u_1)y_2+\mu)}{\Delta_1\beta_1\beta_2(1-u_1)^2 y_2\beta_3(1-u_2)y_2+\mu} > 0 \\
\overline{y}_2 &= \frac{\sqrt{p_1^2+4p_2p_0}}{2p_2} - \frac{p_1}{2p_2} \\
\overline{y}_3 &= \frac{\delta_2}{\gamma_2} y_2.
\end{aligned}
$$